

LIMITES DE SUITES

Étudier la limite d'une suite (u_n) , c'est examiner le comportement des termes u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$.

1) LES DIFFÉRENTS CAS POSSIBLES

Soit une suite (u_n) .

cas 1

Intuitivement, si « u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est assez grand », alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

cas 2

Intuitivement, si les termes u_n finissent par être négatifs et « si u_n est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que n est assez grand », alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$

Remarque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$

cas 3 (suite convergente)

Soit L un réel donné.

Intuitivement, dire que (u_n) a pour limite L , signifie que lorsque n est de plus en plus grand, « les nombres u_n correspondants viennent s'accumuler autour de L ».

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Remarque :

Si une suite (u_n) a une limite finie L , alors la limite L est unique.

cas 4

Aucun des trois cas ne se produit.

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ prend successivement les valeurs 1 et -1. Ainsi (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$, n'a pas pour limite $-\infty$ et n'a pas pour limite un réel.

Remarque : Une suite qui ne converge pas est **divergente**. (cas 1, cas 2, cas 4)

2) OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux, sont admis.

Pour la plupart d'entre eux, ils sont naturels mais ... comme souvent en mathématiques, il y a quelques cas particuliers.

On note par un point d'interrogation « ? » les cas où il n'y a pas de conclusion générale.

On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées. Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

• Limite de la suite de terme général $k \times u_n$ (où k est un réel donné)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k > 0$)	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k < 0$)	kL	$-\infty$	$+\infty$

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = 5n^2$

On a $w_n = 5u_n$ où $u_n = n^2$

Comme $5 > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

• **Limite de la suite de terme général $u_n + v_n$**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$?

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

On a $w_n = u_n + v_n$ où $u_n = 5n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, on en déduit par somme que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

• **Limite de la suite de terme général $u_n \times v_n$**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$?

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = -n^2 \times \left(5n^2 + \frac{1}{n}\right)$

On a $w_n = u_n \times v_n$ où $u_n = -n^2$ et $v_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, on en déduit par produit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$

• **Limite de la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$**

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$?

Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Remarques :

- « 0 en restant négative ou positive » signifie qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > n_0$, (v_n) garde un signe constant.
- On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$ pour indiquer que (v_n) tend vers 0 en restant positive.
- On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^-$ pour indiquer que (v_n) tend vers 0 en restant négative.

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = \frac{5n^2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

On a $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ où $u_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$, on en déduit par quotient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

3) LIMITES ET COMPARAISON

Propriété :

Soit deux suites (u_n) et (v_n) .
• Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
• Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Preuve du premier point : exigible

Soit $M > 0$ et l'intervalle $]M; +\infty[$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n > n_0$, alors $u_n \in]M; +\infty[$.

De plus, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n > n_1$, alors $u_n < v_n$.

On note N le maximum de n_0 et n_1 .

On en déduit que, si $n > N$, alors $v_n \in]M; +\infty[$.

Ce résultat est vrai pour tout intervalle $]M; +\infty[$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Le deuxième résultat se démontre de la même façon.

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = n - \sin(n)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq -\sin(n)$, donc $n - 1 \leq n - \sin(n)$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - \sin(n)) = +\infty$

Propriété :

- Soit une suite (u_n) croissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$, alors tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à L .
- Soit une suite (u_n) décroissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$, alors tous les termes de la suite (u_n) sont supérieurs ou égaux à L .

Preuve du premier point :

Raisonnons par l'absurde :

Supposons, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > L$.

Considérons alors l'intervalle ouvert centré sur $L : I =]L - (u_{n_0} - L); L + (u_{n_0} - L)[=]2L - u_{n_0}; u_{n_0}[$.

Comme (u_n) est croissante, pour tout $n > n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ et $u_n \notin I$.

On a donc trouvé un intervalle ouvert contenant L qui ne contient pas toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang n .

La supposition de départ est donc fautive et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq L$.

Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement : admis

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leq w_n \leq v_n$
 Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite L , alors la suite (w_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$.

4) LIMITE DE LA SUITE (q^n) où $q \in \mathbb{R}$

Propriété :

- | | |
|--|---|
| Soit $q \in \mathbb{R}$.
• Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
• Si $q = 1$, alors pour tout n , $q^n = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ | • Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
• Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) est divergente |
|--|---|

Preuve du troisième point : exigible

- Soit $a > 0$. Montrons par récurrence que pour tout entier n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Soit $P(n)$ la proposition : « $(1 + a)^n \geq 1 + na$ »

Initialisation :

pour $n = 0$, on a : $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Supposons que la proposition $P(n)$ soit vraie pour un entier naturel fixé n .

On a donc : $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que : $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \times a$

On a :

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a) \times (1 + a)^n \text{ et } (1 + a)^n \geq 1 + na$$

$$\text{On en déduit que } (1 + a)^{n+1} \geq (1 + a) \times (1 + na)$$

$$\text{Or } (1 + a) \times (1 + na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2$$

$$\text{Comme } na^2 \geq 0, \text{ on en déduit que } 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a \Rightarrow (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \times a$$

La proposition $P(n+1)$ est alors vérifiée.

Conclusion :

On a donc démontré par récurrence que la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

c'est-à-dire que : $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour tout n de \mathbb{N}

- Montrons que si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

On a $q > 1$, on peut donc écrire $q = 1 + a$ où $a > 0$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q^n = (1 + a)^n$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^n \geq 1 + na$

Or, comme $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$

On en déduit donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 supérieur à 1 ; elle est donc divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque :

On en déduit facilement la limite d'une suite géométrique de terme général $u_0 q^n$.

Exemple :

Soit (v_n) La suite définie par $v_n = -5 \times 2^n = -5 \times u_n$ où $u_n = 2^n$.

On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$; on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

5) CONVERGENCE DE SUITES MONOTONES

Définition :

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \leq M$.
 - Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \geq m$.
 - Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.
- Comme pour les fonctions, on dit que M (respectivement m) est **un majorant** (respectivement **minorant**) de la suite.

Propriété : admise

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

Remarques :

- La propriété permet de justifier qu'une suite est convergente, mais elle ne permet pas de donner la limite.
- Si une suite est majorée par M , sa limite, si elle existe, est nécessairement inférieure ou égale à M .

Propriété :

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Preuve du premier point : exigible

Soit (u_n) une suite croissante non majorée et A un réel strictement positif.

La suite (u_n) n'est pas majorée, il existe donc un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$.

Or la suite (u_n) est croissante. Ainsi pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n_0} > A$.

Ainsi pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in]A; +\infty[$.

Tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, et par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

On démontre d'une façon similaire qu'une suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Remarque :

Une suite non majorée n'a pas nécessairement pour limite $+\infty$. Une telle suite a des termes aussi grands que l'on veut puisqu'elle n'est pas majorée, mais elle n'a pas nécessairement ses termes aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang.

On peut citer comme exemple la suite (u_n) définie par $u_n = ((-1)^n + 1)n$