

# DÉNOMBREMENT

## 1) PRINCIPE ADDITIF

### Définition :

Soit  $A$  un ensemble fini . Le nombre d'éléments de  $A$  s'appelle **le cardinal de  $A$**  et est noté  $\text{Card}(A)$ .

### Propriété : admise

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont  $n$  ensembles deux à deux disjoints, alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_n).$$

### Rappel :

Si  $A \cap B = \emptyset$ , on dit que les ensembles  $A$  et  $B$  sont disjoints.

**Remarque :** Si des ensembles forment une partition d'un autre ensemble, ils sont alors deux à deux disjoints.

Ainsi, si  $A$  est une partie d'un ensemble  $E$ , alors  $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$

**Exemple :** Combien y a-t-il de carrés sur la figure ci-contre?

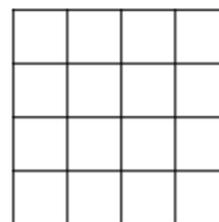
On note  $E$  l'ensemble de tous ces carrés et  $A_1, A_2, A_3, A_4$  respectivement

l'ensemble de ces carrés ayant pour côtés 1, 2, 3 et 4 carreaux.

Les sous-ensembles  $A_1, A_2, A_3, A_4$  constituent une partition de  $E$  (puisque'ils n'ont pas d'éléments en commun et que leur réunion est égale à  $E$ ).

D'après le principe additif, on a :

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \text{Card}(A_3) + \text{Card}(A_4) = 16 + 9 + 4 + 1 = 30.$$



**Remarque :** Si  $A$  et  $B$  sont quelconques (c'est-à-dire pas nécessairement disjoints), alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

## 2) PRODUIT CARTÉSIEN

### Définition :

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles finis et non vides.

**Le produit cartésien** de  $A$  par  $B$  noté  $A \times B$  est l'ensemble des couples  $(x; y)$  formés d'un élément  $x$  de  $A$  suivi d'un élément  $y$  de  $B$ .

On définit de la même façon le produit cartésien de 3, 4, ...,  $n$  ensembles.

Ce qui consiste à distribuer tous les éléments de  $A$  par rapport à chaque élément de  $B$ .

On peut écrire :  $A \times B = \{(x; y), x \in A \text{ et } y \in B\}$

**Exemple :** Soit  $A = \{1; 2; 3\}$  et  $B = \{a; b\}$ .

On a  $A \times B = \{(1; a); (2; a); (3; a); (1; b); (2; b); (3; b)\}$  et  $B \times A = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (b, 1); (b, 2); (b, 3)\}$

### Remarques :

- $A \times B \neq B \times A$  : l'ordre d'un produit cartésien est important
- Si  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ , alors  $A \times B = \emptyset$
- Le produit d'un ensemble infini par un ensemble infini est infini. (  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  représente l'ensemble de tous les couples de nombres réels )

### Définition :

Soit  $A$  est un ensemble fini et non vide et  $k$  est un entier naturel non nul.

On note :  $A^k = A \times A \times \dots \times A$  ( $k$  facteurs)

Les éléments de  $A^k$  sont des couples, des triplets, des quadruplets ...  
De façon générale, on parle de **k-uplet** (ou **k-listes**) ordonnés.

Les coordonnées dans le plan ou dans l'espace offrent de bons exemples d'emploi.

**Exemple :** On dispose de trois dés tétraédriques (un bleu, un rouge, un jaune) dont les faces sont marquées de 1 à 4.

On jette les trois dés et on note dans l'ordre le résultat obtenu sur le dé bleu, puis rouge, puis jaune.

Si  $A = \{1; 2; 3; 4\}$  alors,  $A^3$  est l'ensemble de tous les résultats possibles.

### 3) PRINCIPE MULTIPLICATIF

**Propriétés :**

- Soit A et B deux ensembles finis et non vides . On a alors  $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$  .
- Soit A un ensemble fini et non vide et  $k$  un entier naturel non nul.  
Si  $\text{Card}(A) = n$  , alors  $\text{card}(A^k) = n^k$  .

Résultat immédiat en utilisant la distributivité

**Exemple :** On reprend l'exemple précédent .  $\text{Card}(A^3) = 4^3 = 64$

Il y a donc 64 résultats possibles pour l'expérience envisagée.

**Dans la pratique, ce principe s'applique souvent en utilisant un schéma à cases :**

Si une situation comporte  $k$  étapes offrant respectivement  $n_1, n_2, \dots, n_k$  possibilités alors le nombre total d'issues est :  $n_1 \times n_2 \dots \times n_k$

**Exemple :** Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul. Combien peut-on former de codes distincts ?

D'après le principe multiplicatif, on a :

	Lettre 1	Lettre 2	Chiffre	
Nombres de possibilités	26	25	9	$26 \times 25 \times 9 = 5850$

**Exemple : Nombre de parties d'un ensemble à n éléments ( Exemple à connaître )**

Soit A un ensemble tel que  $\text{card}(A) = n$  . Combien de parties différentes contient A ?

Il suffit pour chaque élément de se poser la question appartient-il ( noté 1 ) ou non ( noté 0 ) à la partie choisie.

D'après le principe multiplicatif, on a :

	Élément 1	Élément 2	...	Élément n	
Nombres de possibilités	2	2	...	2	$2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$

### 4) ARRANGEMENTS ET PERMUTATIONS

**Définition :**

Soit un ensemble A de cardinal  $n$  et un entier  $k \leq n$  .

**Un arrangement de k éléments choisis parmi n** est un  $k$  -uplet d'éléments distincts de A.

**Exemple :** Soit un ensemble  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

un arrangement de 3 éléments de A sera par exemple ( 1 ; 4 ; 2 ) ou ( 1 ; 6 ; 3 ) .

( 1 ; 4 ; 4 ) n'est pas un arrangement, c'est un 3-uplet (un triplet) dont les éléments qui le composent ne sont pas distincts.

**Propriété :**

Soit un ensemble A de cardinal  $n$  et un entier  $k \leq n$  .

**Le nombre d'arrangements** de  $k$  éléments de A est :  $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$  .

On le note  $A_n^k$  .

$A_n^k$  est le produit de  $k$  entiers consécutifs décroissant à partir de  $n$  .

**Preuve :**

Ce résultat se montre facilement avec un schéma à cases :

D'après le principe multiplicatif, on a :

	Élément 1	Élément 2	...	Élément k	
Nombres de possibilités	$n$	$n-1$	...	$n-(k-1) = n-k+1$	$n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$

**Exemple :**  $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$

**Remarque :** On utilise les arrangements en cas de choix successifs de  $p$  éléments pris parmi  $n$ , sans répétition.

**Définition :**

Soit un ensemble  $A$  de cardinal  $n$ .  
**Une permutation** de  $A$  est un arrangement de  $E$  ayant  $n$  éléments.

**Exemple :** Soit un ensemble  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$(1; 3; 2; 6; 5; 4)$  et  $(6; 5; 4; 2; 1; 3)$  sont deux permutations de  $A$ .

**Définition :**

On note  $n!$  (lire « **factorielle  $n$**  ») le produit des  $n$  premiers entiers naturels non nuls.  
Par convention, on pose  $0! = 1$ .

On a alors  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

**Propriété :**

Soit un ensemble  $A$  de cardinal  $n$ .  
Le nombre de permutations de  $A$  est  $n!$ .

Immédiat, car une permutation est un arrangement de  $A$  ayant  $n$  éléments.

**Remarque :** On utilise les permutations dans les cas où on veut ordonner tous les éléments d'un ensemble sans répétition.

### 5) COMBINAISONS

**Définition :**

Soit  $A$  un ensemble de cardinal  $n$ .  
Une partie à  $k$  éléments de  $A$  est **une combinaison** de  $k$  éléments de  $A$ .

**Exemple :** Soit un ensemble  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$\{2; 5; 6\}$  et  $\{6; 5; 2\}$  sont deux combinaisons identiques à 3 éléments de  $A$ .

**Remarque :** Le fait d'utiliser des accolades signifie que l'ordre d'écriture n'est pas important.

**Propriété :**

Soit un ensemble  $A$  de cardinal  $n$  et un entier  $k \leq n$ .  
**Le nombre de combinaisons** de  $k$  éléments de  $A$  est :  $\frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$   
On le note  $\binom{n}{k}$  (notation que nous utiliserons) ou parfois  $C_n^k$ .

$\binom{n}{k}$  se lit “  $k$  parmi  $n$  ”.

On l'appelle **coefficient binomial**.

**Preuve :**

Dénombrons les arrangements de  $k$  éléments d'un ensemble fini  $A$  de cardinal  $n$ .  
Un arrangement est caractérisé par :

- Le choix d'une partie de  $A$  à  $k$  éléments (il y a  $\binom{n}{k}$  choix de telles parties)
- La façon d'ordonner les  $k$  éléments de la partie choisie (il y a  $k!$  façons)

On en déduit que :  $A_n^k = k! \binom{n}{k} \Leftrightarrow \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!}$

**Exemple :** Soit un ensemble  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Il y a  $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$  combinaisons à 3 éléments de  $A$ .

**Remarque :** L'ensemble des parties d'un ensemble A à  $n$  éléments est constitué des parties à 0 élément, 1 élément, 2 éléments, ...,  $n$  éléments.

Ainsi le nombre de parties de A est  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ . Or nous avons déjà vu que le nombre de parties de A est  $2^n$ .

On en déduit que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

**Propriétés :**

- Pour tout entier naturel  $n$ , et pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , on a :  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- De plus, si  $n \geq 1$  et  $1 \leq k \leq n-1$ , alors :  $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

**Preuve :** deuxième point exigible

Pour chacune de ces propriétés, deux démonstrations sont proposées : une démonstration par le calcul et une démonstration par une méthode combinatoire.

• **Démonstration par une méthode combinatoire :**

$\binom{n}{k}$  représente le nombre parties de  $k$  éléments d'un ensemble A à  $n$  éléments.

Or, à chaque partie on peut associer de façon unique une autre partie : son complémentaire.

Et le complémentaire d'une partie à  $k$  éléments comporte  $n-k$  éléments.

Donc dénombrer les parties à  $k$  éléments revient à dénombrer les parties complémentaires à  $n-k$  éléments et il y en a  $\binom{n}{n-k}$ .

**Démonstration par le calcul :**  $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

• **Démonstration par une méthode combinatoire :**

Soit A un ensemble à  $n+1$  éléments avec  $n \geq 1$ .

Soit  $a$  un élément fixé de A. Remarquons que les parties à  $k+1$  éléments de A se partagent en deux catégories :

- celles ne contenant pas  $a$  (il y en a  $\binom{n}{k+1}$ ), car fabriquer une telle partie revient à choisir  $k+1$  éléments parmi  $n$ .

- celles contenant  $a$  (il y en a  $\binom{n}{k}$ ), car fabriquer une telle partie revient à choisir  $k$  éléments parmi  $n$ .

Or ces deux catégories constituent une partition de l'ensemble des parties à  $k+1$  éléments de A.

D'après le principe additif, on a donc :  $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

**Démonstration par le calcul :**

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \times \left( \frac{k+1}{n+1} + \frac{n-k}{n+1} \right) = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \times \frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$

**TRIANGLE DE PASCAL**

La deuxième formule permet de calculer les nombres  $\binom{n}{k}$  de proche en proche en formant le tableau suivant appelé **triangle de Pascal**.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

•  $\binom{n}{k}$  n'est défini que pour  $k \leq n$ ; on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.

• Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat  $\binom{n}{n} = 1$

• Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule  $\binom{n}{0} = 1$

• Tous les autres nombres sont obtenus en utilisant le résultat :

$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

« Tout nombre du tableau est la somme du nombre placé au-dessus de lui et du nombre précédant ce dernier dans le tableau »