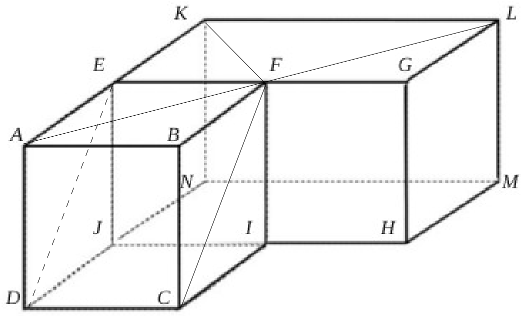
Chapitre 3 - VECTEURS , DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Avant tout, rappelons une propriété fondamentale :

Tout théorème de géométrie plane s'applique dans n'importe quel plan de l'espace.

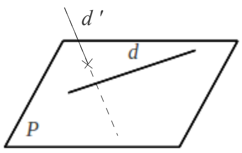
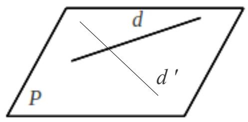
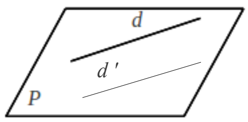
Les exemples de ce chapitre se réfèrent à la figure ci-contre

$ABCDEFIJ$ est un cube
$EGHJKLMN$ est un parallélépipède rectangle tel que $HM = CI$ et $JH = 2\,JI$



1) POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET DE PLANS

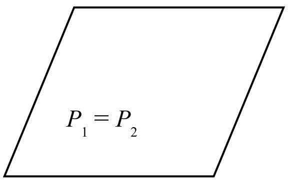
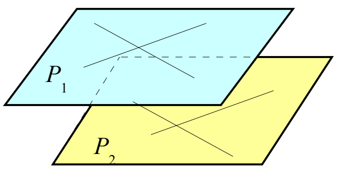
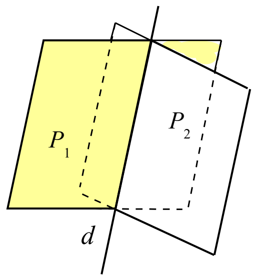
A) POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

d et d' sont non coplanaires	d et d' sont coplanaires	
Aucun plan ne les contient toutes les deux.	Elles sont sécantes.	Elles sont parallèles.
		

Exemple :

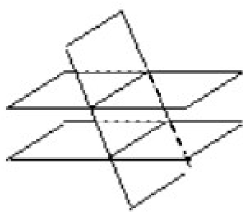
- Les droites (AB) et (HN) sont
- Les droites (AB) et (JH) sont
- Les droites (AL) et (KF) sont

B) POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS

P_1 et P_2 sont parallèles		P_1 et P_2 sont sécants
P_1 et P_2 confondus 	 P_1 et P_2 sont strictement parallèles	
	Il existe deux droites sécantes de P_1 et deux droites sécantes de P_2 parallèles deux à deux.	

Propriété d'incidence :

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections sont des droites parallèles.



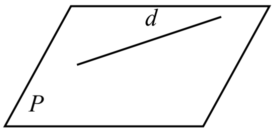
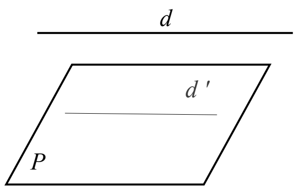
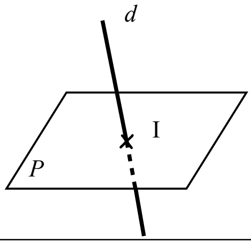
Exemple :

- Les plans (EKL) et (EGJ) sont

- Les plans (EKL) et (JNM) sont

- Le plan $(CDEF)$ coupe les plans parallèles $(AEJD)$ et $(BFIC)$ suivant

C) POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

d et P sont parallèles		d et P sont sécants
 d est contenue dans P	 d est strictement parallèle à P	

Exemple :

2) VECTEURS DE L'ESPACE

Comme dans le plan, à tout couple de points A et B de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- Lorsque $A \neq B$, **la direction** de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB) , **le sens** de $\overrightarrow{AB}$ est le sens de A vers B et la **longueur** ou **norme** de $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la distance AB.

  Lorsque $A = B$, $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, noté $\vec{0}$.
- On désigne souvent les vecteurs par une seule lettre, par exemple $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ …
- Pour tout point O de l'espace et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

A) VECTEURS ÉGAUX

Chacune des propriétés suivantes signifie que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même direction, même sens et même norme.
- $ABCD$ est un parallélogramme, c'est à dire $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu .
  (Si A, B, C et D sont alignés, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme aplati)

B) RÈGLES DE CALCUL

Les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont analogues aux règles de calcul sur les vecteurs du plan.

- **RELATION DE CHASLES :**

  Exemple : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} =$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} =$ $\qquad$ $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{KL} =$

- **RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME :**

  Exemple : $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} =$ $\qquad$ $\overrightarrow{JN} + \overrightarrow{JH} =$ $\qquad$ $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{DA} =$

- **OPPOSÉ D'UN VECTEUR :**

  Exemple : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{FE}$

- **MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL :**
  Pour tous réels a et b, et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :
  $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$, $(a+b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u}$, $a(b\,\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}$, $a\,\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ etc ...

C) VECTEURS COLINÉAIRES

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui ont la même direction sont dits colinéaires.
  Par convention le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\,\vec{v}$

- Dire que les points A, B et C (distincts) sont alignés revient à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{AC}$.

D) TRANSLATION

Comme dans le plan, on peut définir une translation dans l'espace.

Définition :

Soit $\vec{u}$ vecteur de l'espace.
La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation de l'espace notée souvent $t_{\vec{u}}$ qui à tout point M de l'espace associe le point M', tel que : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

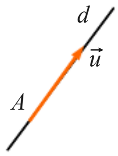
Exemple :

- est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$

- F est l'image de par la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$

3) INTERPRÉTATION VECTORIELLE DES DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

A) DROITES



Définition :

Soit d une droite. On appelle **vecteurs directeurs** de d les vecteurs, non nuls, définis par deux points de d.

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
$(A\,;\vec{u})$ représente la droite qui passe par A et de direction, la direction de $\vec{u}$.

Remarques :

- La droite $(A\,;\vec{u})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est à dire tels qu'il existe un réel k vérifiant $\overrightarrow{AM}=k\,\vec{u}$.
- Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{CD}$.

Conséquence :

- Deux droites sont parallèles si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs son colinéaires.

B) PLANS

PLAN DÉTERMINÉ PAR TROIS POINTS

Propriété :

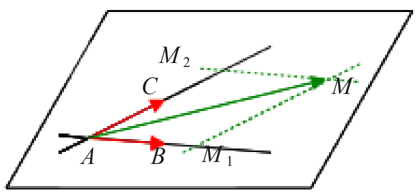
Soit A, B et C trois points non alignés.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe des réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$

Preuve :

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

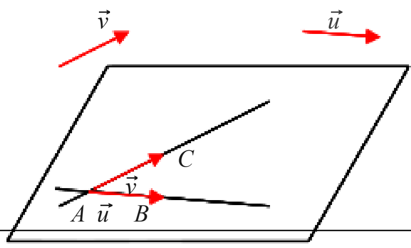
- Le repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère de (ABC) . Ainsi, pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels $(x\,;y)$ tels que $\overrightarrow{AM}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}$

- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}$.
  On note M_1 et M_2 les points définis par $\overrightarrow{AM_1}=x\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_2}=y\,\overrightarrow{AC}$
  L'égalité $\overrightarrow{AM_1}=x\,\overrightarrow{AB}$ prouve que M_1 est sur (AB) , donc dans le plan (ABC). De même M_2 est sur (AC), donc dans le plan (ABC) .
  D'autre part on a $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM_1}+\overrightarrow{AM_2}$, donc AM_1MM_2 est un parallélogramme.
  Les sommets A, M_1 et M_2 sont dans le plan (ABC), il en est donc de même pour le quatrième sommet M .



On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **des vecteurs directeurs** du plan (ABC) .

PLAN DÉFINI PAR UN POINT ET UN COUPLE DE VECTEURS NON COLINÉAIRES



Un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires déterminent un unique plan : le plan (ABC) où $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.

On note $(A\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ ce plan

$(A\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}$.

Vocabulaire à connaître :

- On dit :
  - que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **des vecteurs directeurs** du plan (ABC),
  - ou qu'ils définissent **la direction** du plan (ABC),
  - ou que le plan (ABC) est **dirigé** par $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
  - ou que $(\vec{u}\,,\vec{v})$ est une **base** des vecteurs du plan (ABC).
- Si on peut écrire un vecteur $\vec{w}$ sous la forme $a\,\vec{u}+b\,\vec{v}$, on dit que $\vec{w}$ s'exprime comme **une combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- La seule combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ égale au vecteurs nul est celle (dite triviale) dont tous les coefficients sont nuls. On dit que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **linéairement indépendants** .

Remarque :

Si $\vec{u'}$ est un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$, et $\vec{v'}$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{v}$, alors le plan $(A\,;\vec{u'}\,,\vec{v'})$ est le même que le plan $(A\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Exemple : Les plan $(A\,;\overrightarrow{DN}\,,\overrightarrow{KL})$ et $(A\,;\overrightarrow{AE}\,,\overrightarrow{AB})$ sont

Conséquences :

- Deux plans ayant même couple de vecteurs directeurs sont parallèles.
- Une droite d et un plan P sont parallèles si, et seulement si, un vecteur directeur $\vec{w}$ de d est un vecteur du plan P, ce qui signifie que l'on peut exprimer $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire de deux vecteurs directeurs de P.

4) DÉCOMPOSITION DE VECTEURS

A) VECTEURS COPLANAIRES

Définition :

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, …., de l'espace sont dits **coplanaires** lorsqu'un point O quelconque et les points A , B , C, … , définis par $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$, … , sont coplanaires.

Cette définition ne dépend pas du point O choisi.

Remarques :

- Deux vecteurs sont toujours
- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors quel que soit le vecteur $\vec{w}$,

Exemple : Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont coplanaires.

Propriété :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\vec{w}=a\,\vec{u}+b\,\vec{v}$.

Preuve :

Soit O un point de l'espace. On considère les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les points O, A et B ne sont pas alignés et déterminent donc un plan, le plan (OAB).
Par définition, dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire $C\in(OAB)$ … ce qui revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{OC}=a\,\overrightarrow{OA}+b\,\overrightarrow{OB}$.

Remarque : Si trois vecteurs sont non coplanaires, alors aucun des trois ne peut se décomposer en fonction des deux autres.

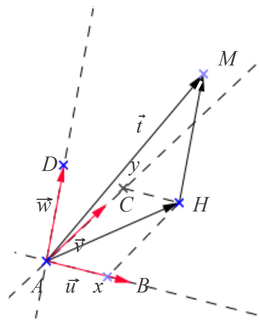
B) VECTEURS NON COPLANAIRES – BASE DES VECTEURS DE L'ESPACE

Propriété :

> Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
> Pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de réels tels que : $\vec{t}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}+z\,\vec{w}$

Preuve :

Existence :
Soit A, B, C, D et M des points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{t}=\overrightarrow{AM}$.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, sinon $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ seraient coplanaires.
Ainsi A, B et C définissent un plan dont $(A\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ est un repère.
La parallèle à la droite (AD) passant par M, dirigée par $\vec{w}$, qui n'est pas un vecteur du plan (ABC), puisque $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires, est sécante à ce plan en un point H.
$\overrightarrow{HM}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, donc $\overrightarrow{HM}=z\,\vec{w}$, où z est un réel, et H appartient au plan (ABC),
donc $\overrightarrow{AH}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}$ (x et y réels)
Comme $\vec{t}=\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}$, on obtient l'existence d'un triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de réels tels que
$\vec{t}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}+z\,\vec{w}$

Unicité :
On suppose que l'on a deux écritures : $\vec{t}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}+z\,\vec{w}=x'\,\vec{u}+y'\,\vec{v}+z'\,\vec{w}$
On a alors $(x-x')\vec{u}+(y-y')\vec{v}+(z-z')\vec{w}=\vec{0}$.
Supposons que l'une des trois différences n'est pas nulle, par exemple $(z-z')\neq 0$.
On obtient :
$$\vec{w}=\frac{x-x'}{(z-z')}\vec{u}+\frac{y-y'}{(z-z')}\vec{v}$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ seraient alors coplanaires … ce qui n'est pas possible.
On en déduit que $z=z'$ et de la même façon que $x=x'$ et $y=y'$.

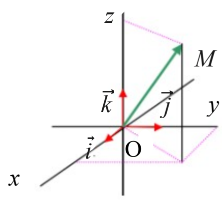
Remarques :

- Encore une fois, on dit que l'on a décomposé le vecteur $\vec{t}$ sous la forme d'une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **linéairement indépendants** et forment **une base** des vecteurs de l'espace.

5) REPÈRES DE L'ESPACE

Propriété et définitions :

> Soit O un point et $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base des vecteurs de l'espace.
> A tout point M de l'espace, on peut associer un unique triplet de réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que :
> $$\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$
> On dit que $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les **coordonnées** du point M dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ ou que x, y et z sont respectivement **l'abscisse** , **l'ordonnée** et **la cote** du point M.



Exemple :

Dans le repère $(J\,;\overrightarrow{JD}\,,\overrightarrow{JI}\,,\overrightarrow{JE})$, on a

Les propriétés et les règles de calcul vues dans le plan pour les coordonnées de vecteurs et de points se prolongent dans l'espace en ajoutant simplement une troisième coordonnée.

Propriétés :

Dans un repère donné de l'espace, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ deux vecteurs , $A(x\,;y\,;z)$ et $B(x'\,;y'\,;z')$ deux points.

- Pour tout réel k , le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées
- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées
- $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow$
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées
- Le milieu I de a pour coordonnées