- LIMITES DE FONCTIONS - MATH SPÉ chapitre 4 : L'ESSENTIEL DU COURS

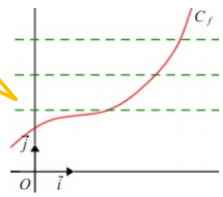
Pour tout réel $M>0$, les nombres $f(x)$ finissent par se retrouver dans l'intervalle $]M;+\infty[$

Limites infinie en l'infini :

Géométriquement : Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande , la courbe finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale .

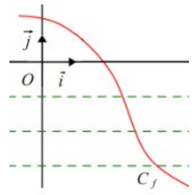
Dans la pratique, on peut utiliser la remarque suivante : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



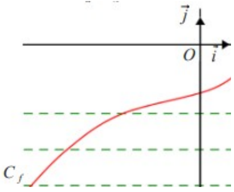
f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$



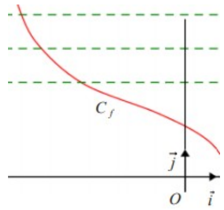
f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

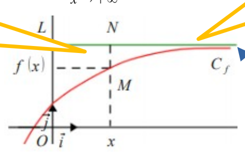
De la même façon ….

Limites finie en l'infini :

Géométriquement : Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance MN tend vers 0 . La courbe C_f se rapproche sans cesse de la droite d'équation $y=L$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

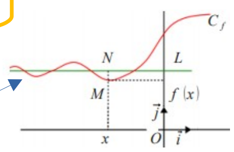
Pour tout $\varepsilon>0$ (aussi petit qu'il soit) les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon;L+\varepsilon[$



en $+\infty$

f a pour limite L quand x tend vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$



en $-\infty$

f a pour limite L quand x tend vers $-\infty$

Asymptote horizontale :

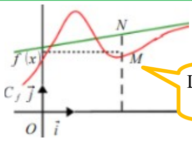
La droite d'équation $y=L$ est **asymptote <u>horizontale</u>** à la courbe C_f en $+\infty$. (ou en $-\infty$)

Asymptote oblique :

(hors programme, mais intéressant)

Dire que la droite d'équation $y=ax+b$ ($a\neq 0$) est **asymptote <u>oblique</u>** à C_f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) revient à dire que :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$)

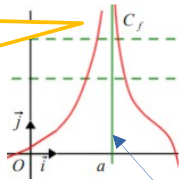


La distance MN tend vers 0

Limite infinie en un réel a :

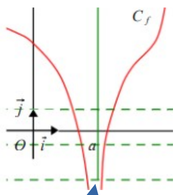
Géométriquement : Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , la courbe C_f finit par se situer au dessus (et en dessous pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$



f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a

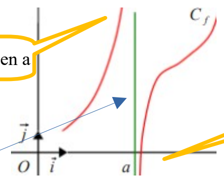
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$



f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers a

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

Limite à gauche en a



Limite à droite en a

f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs inférieures à a
f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures à a

Asymptote verticale :

la droite d'équation $x=a$ est **asymptote <u>verticale</u>** à la courbe C_f

Limite finie en un réel a :

$a\in D_f$ ou est une borne de D_f

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

Pour tout $(\varepsilon>0)$ (aussi petit qu'il soit) les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon\,;\,L+\varepsilon[$

Continuité en a :

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, on dit que la fonction f est **continue en *a***.

C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée …et des composées de ces fonctions.

Opérations sur les limites :

Ces opérations sont identiques à celles déjà vues avec les suites.

Attention aux formes indéterminées : « $+\infty-\infty$ » « $0\times\infty$ » « $\frac{\infty}{\infty}$ » « $\frac{0}{0}$ »

Limite d'une fonction composée :

Soit f, g et h trois fonctions telles que $f(x)=g(h(x))$. Chacune des lettres a, b et c désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$ et si $\lim\limits_{x\to b} g(x)=c$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

<u>Dans la pratique :</u> Soit $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+5}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Posons $X=2x^2-3x+5$. On a alors $f(x)=\sqrt{X}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} X=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$

On en déduit par composition que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Théorème des gendarmes :

Ce théorème reste valable pour des limites en $-\infty$ et en un réel a .
Il suffit dans les hypothèses de modifier le domaine de validité des inégalités.

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]b\,;+\infty[$ où b est un réel et soit L un réel donné.

Si pour tout $x\in]b\,;+\infty[$, $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=L$, alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

Théorèmes de comparaison en l'infini (TCI) :

Ce théorème reste valable pour des limites en $-\infty$.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]b\,;+\infty[$ où b est un réel.

- Si pour tout $x\in]b\,;+\infty[$ $g(x)\leqslant f(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- Si pour tout $x\in]b\,;+\infty[$ $f(x)\leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$