Limites de fonctions

Ex 4-1 : ***Vrai ou faux***

1) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors :

a) Il existe un réel x tel $f(x)>10^9$

b) Pour tout réel A , il existe un réel m , tel que si $x>m$, alors $f(x)>A$

c) Il existe un réel m , tel que pour tout réel A si $x>m$, alors $f(x)>A$

d) $\exists m\in\mathbb{R}$, tel que $x>m \Rightarrow f(x)>10^4$

2) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-0{,}001$, alors il existe un intervalle de la forme $]m;+\infty[$ sur lequel f est strictement négative.

4) Si f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Ex 4-2 : ***Comprendre la définition***

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle … finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$ pour x ... »

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Ex 4-3 : ***Conjecturer une limite – piéger la calculatrice***

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1) $f:x\longmapsto 10^{-3}x^2-10^2x$

2) $g:x\longmapsto \dfrac{3x^2-2}{10^3x-4}$

3) $h:x\longmapsto 10x^3-0{,}01x^4$

Ex 4-4 : ***Limite et position relative par rapport à une droite***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Si C se situe au-dessus de la droite d'équation $y=1$, les résultats suivants sont-ils possibles ?

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Limite en *a* (avec *a* réel)

Ex 4-5 : ***Comprendre la définition***

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle … finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$ pour x ... »

a) $\lim\limits_{x\to4} f(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+4$

c) $\lim\limits_{x\to4} f(x)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$

Ex 4-6 : ***Vrai ou faux***

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Si $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$, alors $d:y=-1$ est asymptote horizontale à C en $+\infty$.

2) Si $\lim_{x\to -1} f(x)=+\infty$, alors $d: y=-1$ est asymptote verticale à C.

3) Si $\lim_{x\to -1} f(x)=+\infty$, alors $d: x=-1$ est asymptote verticale à C.

<u>Ex 4-7 :</u> ***Conjecturer une limite***

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer les limites suivantes :

1) en -1, si elle existe, de $f: x \longmapsto \frac{3}{(x+1)^2}$

2) en 9, si elle existe, de $f: x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x}-3}$

<u>Ex 4-8 :</u> ***Asymptotes***

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Déduire, si possible, des limites suivantes l'équation d'une asymptote à la courbe C .

a) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

b) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=3$

c) $\lim_{x\to 1-} f(x)=+\infty$

d) $\lim_{x\to 4} f(x)=-\infty$

e) $\lim_{x\to 2} f(x)=3$

f) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=5$

<u>Opérations sur les limites</u>

<u>Ex 4-9 :</u> ***Vrai ou faux***

1) Si $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=1$

2) Si $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim_{x\to +\infty} f(x)\times g(x)=+\infty$

3) Si $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=0$

<u>Ex 4-10 :</u> ***Calculs de limites***

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x}+x+\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim_{x\to 0+} \left(3-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}+3x\right)$

3) $\lim_{x\to +\infty} \left(3-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}+3x\right)$

4) $\lim_{x\to 2-} \frac{x^3}{6-3x}$

5) $\lim_{x\to +\infty} \left(2x+1+\frac{1}{x^2}\right)$

6) $\lim_{x\to -\infty} (4-x^2)(2x-4)$

7) $\lim_{x\to 4+} \left(3x-1+\frac{1}{x-4}\right)$

8) $\lim_{x\to 0} \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$

9) $\lim_{x\to 2+} \left(4-x^2+\frac{4}{4-x^2}\right)$

10) $\lim_{x \to -\infty} \left(3 - \frac{2}{1-2x}\right)$

Ex 4-11 : *Formes indéterminées*

1) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ telles que :

a) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

b) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 3$

2) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ telles que :

a) $\lim_{x \to -\infty} (f(x) g(x)) = 0$

b) $\lim_{x \to -\infty} (f(x) g(x)) = 3$

c) $\lim_{x \to -\infty} (f(x) g(x)) = -\infty$

3) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ telles que :

a) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$

c) $\frac{f}{g}$ n'a pas de limite finie en 0.

Ex 4-12 : *Logique*

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1) Pour que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) g(x)) = 0$, il faut que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

2) Pour que $\lim_{x \to +\infty} (f(x) g(x)) = 0$, il suffit que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Ex 4-13 : *Fonctions polynômes*

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ un polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré

1) Montrer la propriété ci-dessus pour le polynôme
$P(x) = -8x^3 + 14x^2 + 8x + 4$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des polynômes :

$Q(x) = \frac{x^5}{4} - \frac{x^3}{2}$ et $R(x) = 1 - 4x + 5x^2$

Ex 4-14 : *Fonctions rationnelles*

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ une fonction rationnelle a même limite que la fonction formée par le quotient des monômes de plus haut degré.

1) Montrer la propriété ci-dessus pour la fonction rationnelle
$f(x) = \frac{3x+2}{4x^2 - 5}$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions rationnelles :

$g(x)=\dfrac{x^3-4x^2-5}{2x^3-5}$ et $h(x)=\dfrac{(x-5)^4}{(3x^2-5)^2}$

Ex 4-15 : ***Changement de forme - Asymptotes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ -{4} par $f(x)=\dfrac{6x-25}{2x-8}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\neq 4$,

$f(x)=a+\dfrac{b}{2x-8}$.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) En déduire les équations des éventuelles asymptotes à C_f la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Ex 4-16 : ***Asymptotes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ -{-2;2} par $f(x)=\dfrac{3x-7}{x^2-4}$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) En déduire les équations des éventuelles asymptotes à C_f la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Ex 4-17 : ***Déterminer a, b et c ...***

Soit $f: x \longmapsto a+\dfrac{b}{x-c}$ où a , b et c sont des réels et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	0	2		$+\infty$
f	-1	-4	$-\infty$	$+\infty$	-1

1) En observant le tableau, quel réel parmi a , b et c peut-on obtenir sans calcul ? Le donner .

2) À partir de l'expression $f(x)=a+\dfrac{b}{x-c}$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Quel deuxième réel cherché obtient-on ?

3) Déterminer le troisième réel cherché et vérifier les réponses en traçant la courbe représentative de f .

Ex 4-18 : ***Lever l'indéterminée***

Déterminer les limites suivantes, après avoir levé l'indéterminée :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{x}}{x+2}$

Limite d'une fonction composée

Ex 4-19 : ***Calculs de limites***

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$

3) $\lim\limits_{x\to3^+}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$

4) $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-25}}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x^3+2x^2-7}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}+2}$

Ex 4-20 : ***Lever l'indéterminée***

Déterminer les limites suivantes, après avoir levé l'indéterminée :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+3}\right)$ (factoriser par x)

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+3}\right)$ (factoriser par x)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$ (penser à l'expression conjuguée)

Théorèmes de comparaison

Ex 4-21 : ***Vrai ou faux***

1) Si pour tout réel $x\leqslant 0$, $f(x)\geqslant x^2$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2) Si pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3) Si pour tout réel $x\geqslant 1$, $1\leqslant f(x)\leqslant x$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

Ex 4-22 : ***Limite par encadrement***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x\neq 0$,
$3-\dfrac{1}{x^2}\leqslant f(x)\leqslant 3+\dfrac{1}{x^2}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Ex 4-23 :

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x^2}\geqslant\dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{g(x)}{x}\geqslant\dfrac{1}{5}$.
Quelle(s) limite(s) peut-on déduire pour les fonctions f et g ?

Ex 4-24 : ***Deux méthodes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

1) Déterminer une fonction g telle que pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2) Retrouver cette limite en utilisant la limite d'une fonction composée.

Ex 4-25 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $x \leqslant f(x) \leqslant x+1$.

1) a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Peut-on grâce aux hypothèses dire si f admet une limite en 0 et si oui laquelle ?

2) Déterminer la limite de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Ex 4-26 :

Soit f la fonction définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-5}}{x}$.

1) Démontrer que pour tout $x \geqslant 5$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (aide : $0 \leqslant x-5 \leqslant x$)

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Avec la fonction exponentielle

Ex 4-27 : ***Calculs de limites***

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x^2$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^x - 4x^4 + x - 5$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - x^4}{2x^3 - 5e^x}$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 2x$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - x^4}{2 - 5e^x}$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2 - 2x + 1}$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x^2}$

8) $\lim_{x \to +\infty} (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 4-28 : *Baccalauréat S centres étrangers juin 2011 – Ex 4-4 (extrait)*

Calculs de limites avec la fonction exp – tableaux de variations

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ sont respectivement notées $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. leur tracé est donné en annexe.

1. **Étude des fonctions f et g**
   - **a.** Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.
   - **b.** Justifier le fait que fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.
   - **c.** Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.

Ex 4-29 : *Baccalauréat S Asie juin 2010 – Ex 4-4 (extrait)*

Calculs de limites avec la fonction exp - asymptote

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Étude des limites
   - **a.** Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
   - **b.** Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   - **c.** Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?

Ex 4-30 : *Baccalauréat S Polynésie sept 2010 – Ex 4-4 (extrait)*

Calculs de limites avec la fonction exp – tableaux de variations

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.

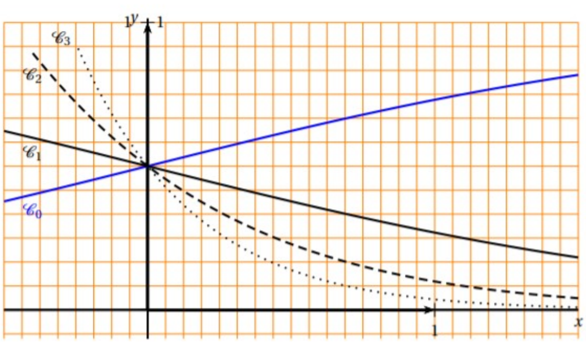
Ex 4-31 : *Baccalauréat S centres étrangers juin 2009 – Ex 4-4 (extrait)*

Calculs de limites avec la fonction exp – tableaux de variations

Soit n un entier naturel.
On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$*

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.
2. Étude de la fonction f_0
   a. Étudier le sens de variation de f_0.
   b. Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.
3. Étude de la fonction f_1
   a. Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.
   b. En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.
   c. Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.
4. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$
   a. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

   b. Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c. Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.