DÉRIVATION : COMPLÉMENTS

Dans ce chapitre j'utilise déjà les fonctions ln, cos et sin qui seront étudiées en détail plus tard.

1) LA NOTATION : $v \circ u$

Définition :

Soit une fonction v, définie de E dans F, et une fonction u, définie de F dans G, **la composée** de v et u (on dit aussi la composée de v suivie de u) est la fonction définie de E dans G qui à tout élément x de E fait correspondre $v(u(x))$

On note $v(u(x))=(v\circ u)(x)$

On lit « v rond u »

Exemple : Soit les fonctions v et u définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=2x-1$ et $u(x)=x^2$

Les fonctions v et u étant définies sur $\mathbb{R}$, il en en est de même pour $v\circ u$ et $u\circ v$
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$(v\circ u)(x)=v(u(x))=v(x^2)=2x^2-1$ et $(u\circ v)(x)=u(v(x))=u(2x-1)=(2x-1)^2$

Exemple : Soit les fonctions v et u définies respectivement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ par $v(x)=\ln(x)$ et $u(x)=-x$

- $x\in D_{v\circ u}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_u\\ u(x)\in D_v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ -x>0\end{cases}\Leftrightarrow x<0$. Ainsi $D_{v\circ u}=\mathbb{R}_-^*$

Pour tout x<0, on a :

$$(v\circ u)(x)=v(u(x))=\ln(u(x))=\ln(-x)$$

- $x\in D_{u\circ v}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_v\\ v(x)\in D_u\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \ln(x)\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow x>0$. Ainsi $D_{u\circ v}=\mathbb{R}_+^*$

Pour tout x>0, on a :

$$(u\circ v)(x)=u(v(x))=-u(x)=-\ln(x)$$

Remarques :

- En général (sauf exception), on a $v\circ u\neq u\circ v$ et les ensembles de définition peuvent être totalement différents.

- On peut composer une fonction avec elle même : on note $f\circ f=f^2$, $f\circ f\circ f=f^3$
- On admet le résultat bien pratique et très intuitif : « la composée de deux fonctions croissantes est croissante »

Propriété : *admise*

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J et u est une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J.
Alors la fonction f définie par $f(x)=(v\circ u)(x)=v(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I, on a :

$$f'(x)=u'(x)\times v'(u(x))$$

Remarque : Cette propriété est proposée sur un intervalle . Elle reste vraie sur des réunions d'intervalles.

Quelques situations classiques : (présentées sans les problèmes de définition et de dérivabilité)

$f(x)=\sqrt{u(x)}$	$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x)=[u(x)]^n$ (n un entier non nul)	$f'(x)=n\,u'(x)[u(x)]^{n-1}$
$f(x)=\ln(u(x))$	$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x)=e^{u(x)}$	$f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$

Exemple : Calcul de la dérivée de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{2x^3}$

$u: x \longmapsto 2x^3$ est strictement positive et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $u'(x)=6x^2$

On en déduit que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x>0$, on a : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\dfrac{6x^2}{2\sqrt{2x^3}}=\dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^3}}$

Exemple : Calcul de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3x^2+1)^5$

$u: x \longmapsto 3x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $u'(x)=6x$

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x)=5\,u'(x)\,(u(x))^4=5\times 6x\,(3x^2+1)^4=30x\,(3x^2+1)^4$

Exemple : Calcul de la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $f(x)=v(u(x))$ où $v: x \longmapsto \sin x$ et $u: x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $v'(x)=\cos x$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $u'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

(Pour tout $x \neq 0$, on a bien sûr $u(x) \in \mathbb{R}$ ... Dans la pratique, quand la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$, cette vérification n'est pas nécessaire)

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$, on a : $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2) DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Sa fonction dérivée f' s'appelle **dérivée première** (ou d'ordre 1) de f.

Lorsque f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est notée f''. f'' est appelée **dérivée seconde** (ou dérivée d'ordre 2) de f.

Par itération, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on définit **la fonction dérivée *n*-ième** (ou d'ordre n) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre $n-1$.

Notation : $f^{(1)}=f'$ et pour tout $n \geqslant 2$, $f^{(n)}=\left(f^{(n-1)}\right)'$.

Exemple : $f: x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x)=3x^2$ puis … $f''(x)=6x$, $f^{(3)}(x)=6$ et $f^{(4)}(x)=0$

3) FONCTIONS CONVEXES ET CONCAVES

A) DÉFINITIONS

Définition :

• Une fonction f, définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **convexe** sur I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessous de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersections.

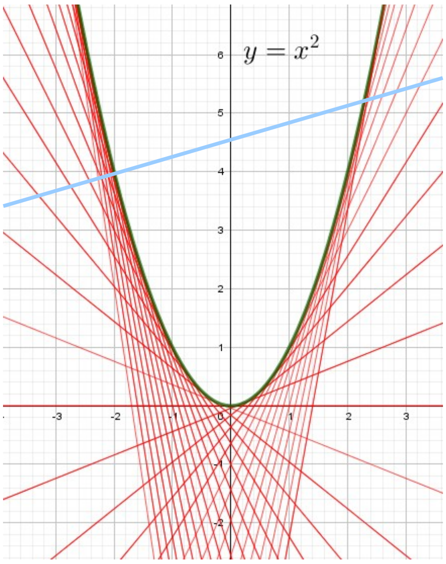
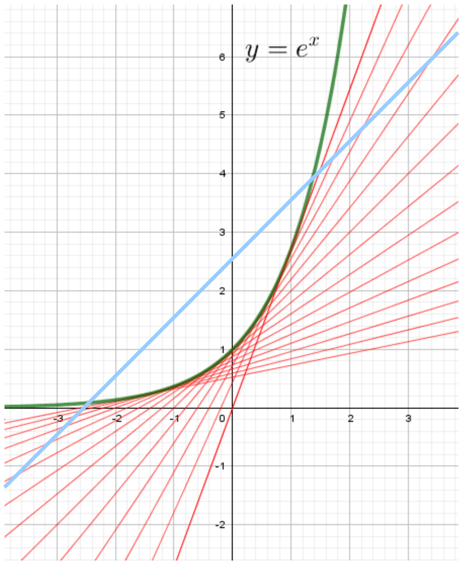
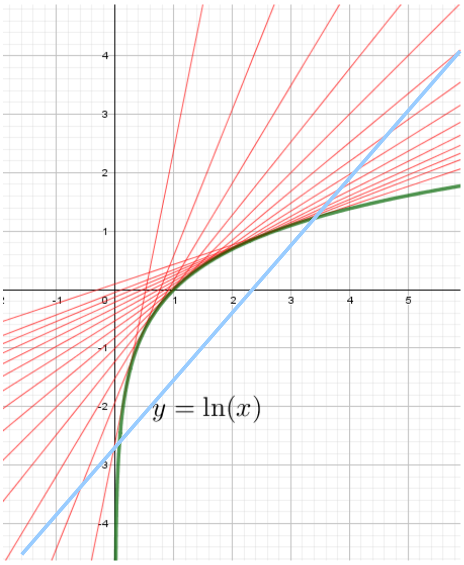
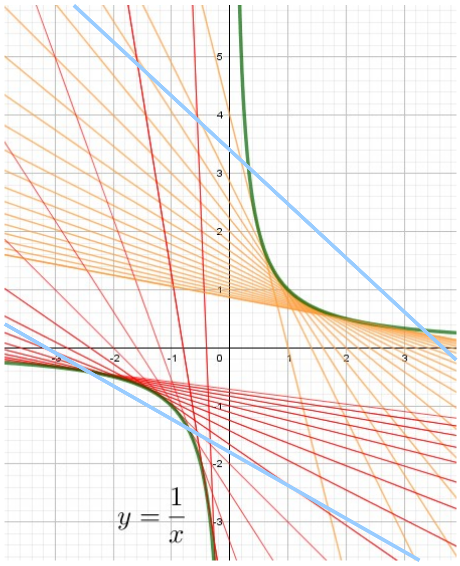
• Une fonction f, définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **concave** sur I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessus de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersections.

Autre définition :

• Une fonction f, définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **convexe** sur I si sa représentation graphique est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

• Une fonction f, définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **concave** sur I si sa représentation graphique est entièrement située en-dessous de chacune de ses tangentes.

Exemple :

La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.	La fonction $f : x \longmapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
	
La fonction $f : x \longmapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}$.	La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_-^*$ et convexe sur $\mathbb{R}_+^*$
	

B) LIEN AVEC LA DÉRIVÉE

Propriété : *admise*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

• f est **convexe** sur I si et seulement si **sa dérivée est croissante sur I**.

• f est **concave** sur I si et seulement si **sa dérivée est décroissante sur I**.

C) LIEN AVEC LA DÉRIVÉE SECONDE

La dérivée de la dérivée étant la dérivée seconde, on en déduit facilement cette nouvelle propriété ...

Propriété :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

• f est **convexe** sur I si et seulement si **sa dérivée seconde est positive sur I**.

• f est **concave** sur I si et seulement si **sa dérivée seconde est négative sur I**.

Si f est dérivable sur I et si f' est aussi dérivable sur I, alors on dit que f est **deux fois dérivable** sur I.

Preuve : ***exigible***

Montrons que si la dérivée seconde f'' est positive sur un intervalle I, alors la courbe représentative C_f de f est au-dessus de chacune de ses tangentes, ce qui signifie que f est convexe.

Soit $a \in \mathrm{I}$, $\mathrm{A}(a\,;f(a))$ un point de C_f et $\mathrm{T}_a : y = f'(a)(x-a)+f(a)$ la tangente à C_f au point A.

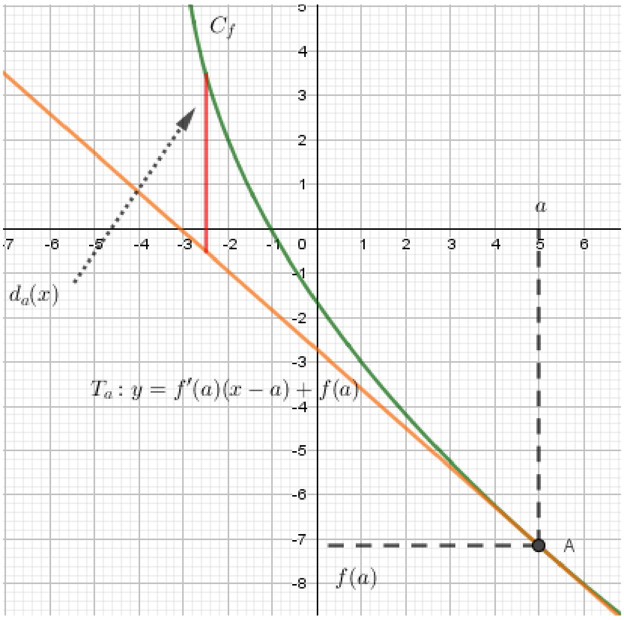
On note , pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$g_a(x) = f'(a)(x-a)+f(a) \quad \text{et} \quad d_a(x) = f(x)-g_a(x) = f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a)) = f(x)-f'(a)x-f'(a)a-f(a)$$

d_a est dérivable sur I, et pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $d_a'(x) = f'(x)-f'(a)$

Comme $f''(x) \geqslant 0$, on en déduit que f' est croissante sur I et que $d_a'(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant a$ et $d_a'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant a$. On a alors :

x		a	
$d'_a(x)$	-	0	+
d_a	↘	0	↗



Ainsi, pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $d_a(x) \geqslant 0$, c'est à dire $f(x)-g_a(x) \geqslant 0$ et donc $f(x) \geqslant g_a(x)$

On en déduit que C_f est au dessus de la tangente T_a .

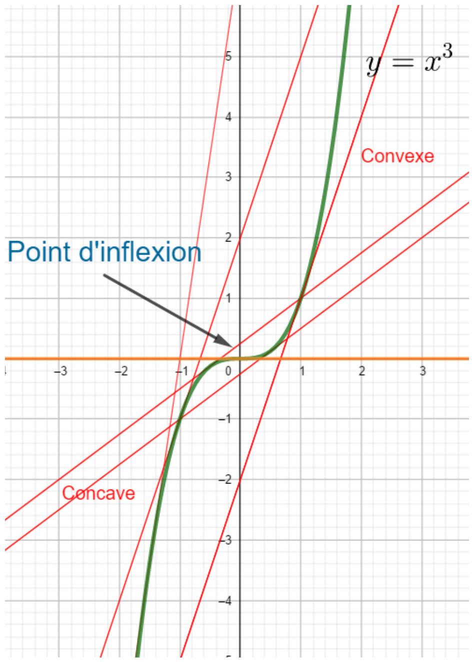
Ceci étant vrai, pour tout réel $a \in \mathrm{I}$, on en peut donc dire que C_f est au-dessus de chacune de ses tangentes.

4) POINT D'INFLEXION

A) DÉFINITION

Définition :

Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique d'une fonction traverse sa tangente



B) LIEN AVEC LA CONVEXITÉ

Propriété :

Dire que la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente en un point signifie que la fonction change de convexité en ce point.

Cela se traduit par un changement de signe de la dérivée seconde en ce point.

Exemple : Mise en évidence par le calcul du point d'inflexion de la fonction $f : x \longmapsto x^3$.

La fonction cube est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a : $f'(x) = 3x^2$.
f' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x sa dérivée seconde est $f''(x) = 6x$.

$f''(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$ donc f est convexe sur $[0\,;+\infty[$

$f''(x) \leqslant 0$ pour $x \leqslant 0$ donc f est concave sur $]-\infty\,;0]$

La fonction change de convexité en 0, la courbe admet donc un point d'inflexion qui est l'origine du repère.