- DÉRIVATION : COMPLÉMENTS - MATH SPÉ chapitre 5 : L'ESSENTIEL DU COURS

http://pierrelux.net

En général $v \circ u \neq u \circ v$

$f \circ f = f^2$, $f \circ f \circ f = f^3$

La composée de v et u :

Soit une fonction v, définie de E dans F, et une fonction u, définie de F dans G, **la composée** de v et u (on dit aussi la composée de v suivie de u) est la fonction définie de E dans G qui à tout élément x de E fait correspondre $v(u(x))$. On note $v(u(x)) = (v \circ u)(x)$

On lit « v rond u »

Dérivée :

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J et u est une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J. Alors la fonction f définie par $f(x) = (v \circ u)(x) = v(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I, on a :

$$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

Quelques situations classiques :

$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = [u(x)]^n$ (n un entier non nul)	$f'(x) = n\,u'(x)\,[u(x)]^{n-1}$
$f(x) = \ln(u(x))$	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x)\,e^{u(x)}$

Dérivée n-ième :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Sa fonction dérivée f' s'appelle dérivée première (ou d'ordre 1) de f.

Lorsque f' est dérivable sur I , sa fonction dérivée est notée f'' . f'' est appelée **dérivée seconde** (ou dérivée d'ordre 2) de f.
Par itération, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on définit **la fonction dérivée *n*-ième** (ou d'ordre n) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre $n-1$.

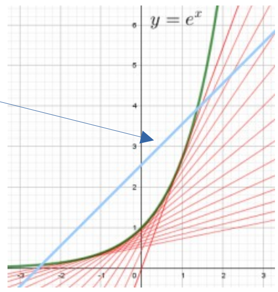
Notation : $f^{(1)} = f'$ et pour tout $n \geqslant 2$, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Fonction convexe :

Une fonction f, définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **convexe** sur I :
• si sa représentation graphique est entièrement **située en dessous de chacune de ses sécantes** entre les deux points d'intersections.

OU

• si sa représentation graphique est entièrement **située au-dessus de chacune de ses tangentes.**



Lien avec la dérivée :

• f est **convexe** sur I si et seulement si **sa dérivée est croissante sur I**.

Lien avec la dérivée seconde :

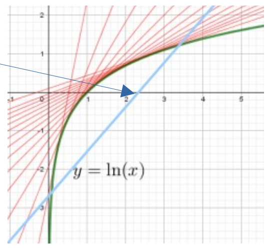
• f est **convexe** sur I si et seulement si **sa dérivée seconde est positive sur I**.

Fonction concave :

Une fonction f, définie, dérivable (donc continue) sur un intervalle I est **concave** sur I :
• si sa représentation graphique est entièrement située **au-dessus de chacune de ses sécantes** entre les deux points d'intersections.

OU

• si sa représentation graphique est entièrement **située en dessous de chacune de ses tangentes.**



Lien avec la dérivée :

• f est **concave** sur I si et seulement si **sa dérivée est décroissante sur I.**

Lien avec la dérivée seconde :

• f est **concave** sur I si et seulement si **sa dérivée seconde est négative sur I**

Point d'inflexion :

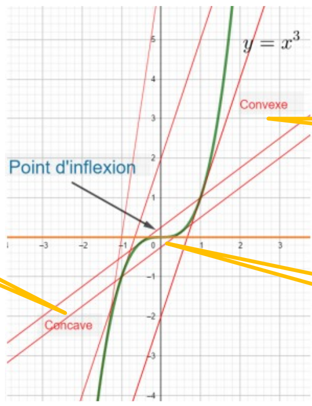
Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique d'une fonction traverse sa tangente

Dire que la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente en un point signifie que la fonction change de convexité en ce point.

Lien avec la dérivée :

Cela se traduit par un changement de signe de la dérivée seconde en ce point.

$f''<0$



$f''>0$

La courbe traverse sa tangente au point d'abscisse 0.