Nombre dérivé d'une fonction en un réel a : quelques rappels

Ex 5-1 : ***Vrai ou faux : restituer les notions du cours***

1) Pour savoir si une fonction est dérivable en a , on regarde la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

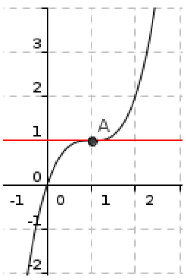
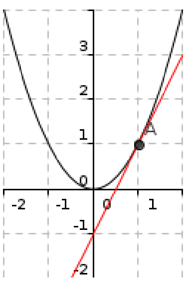
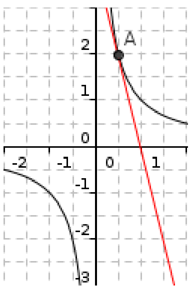
2) Pour savoir si une fonction est dérivable en a , on regarde la limite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque x tend vers a .

3) Il est possible qu'une fonction ne soit pas dérivable en un réel a .

4) Si une fonction f est dérivable en a , la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Ex 5-2 : ***Déterminer $f'(a)$ à l'aide d'un graphique.***

Dans chacun des cas ci-dessous, on considère la courbe représentative C_f d'une fonction f , et A un point de C_f d'abscisse a .
Déterminer $f'(a)$.

1)	2)	3)
		

Ex 5-3 : ***Calculer le nombre dérivé***

Déterminer si le nombre dérivé de la fonction f en a existe et, si c'est le cas, calculer $f'(a)$.

1) $f: x \longmapsto x\sqrt{x}$, $a=0$

2) $f: x \longmapsto |x-3|$, $a=3$

3) $f: x \longmapsto x^2+x+1$, $a=-1$

4) $f: x \longmapsto x^2\sqrt{x}$, $a=0$

5) $f: x \longmapsto |x-5|$, $a=3$

Formules de dérivation : quelques rappels

Ex 5-4 :

D représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel.

	Fonction f	**Fonction dérivée f'**	**Dérivable sur :**
1)	$f:x \longmapsto k \quad (k\in\mathbb{R})$		
2)	$f:x \longmapsto x$		
3)	$f:x \longmapsto \sqrt{x}$		
4)	$f:x \longmapsto x^n$ $(n\in\mathbb{Z}^*)$		
5)	ku		
6)	$u+v$		
7)	uv		
Si pour tout réel a de D, $v(a)\neq 0$			
8)	$\frac{1}{v}$		
9)	$\frac{u}{v}$		

Compléter :

Toute fonction polynôme est dérivable sur …

Toute fonction rationnelle est dérivable sur …

La notation $f\circ g$ ou $v\circ u$

Pour les exercices concernant les composées de fonctions, il faut toujours en premier lieu déterminer **l'ensemble de définition** de $f\circ g$ avant de donner une expression de $f\circ g(x)$

Ex 5-5 : ***Déterminer $f\circ g$ et $g\circ f$***

On considère les fonctions :

$$f:x \longmapsto \frac{1}{x-3} \quad \text{et} \quad g:x \longmapsto x+4$$

1) Déterminer $f\circ g$.

2) Déterminer $g\circ f$.

Ex 5-6 : ***La notation f^2***

Dans chacun des cas ci-dessous définir f^2

1) $f:x \longmapsto x$

2) $f:x \longmapsto \frac{1}{x}$

3) $f:x \longmapsto 4x-3$

Attention : Ne pas confondre cette notation avec la puissance d'une fonction pour la multiplication des fonctions.
Par exemple, $\sin^2$ désigne couramment le carré de la fonction sinus.
Généralement, le contexte de l'exercice, nous évite de faire cette confusion malheureuse.

Ex 5-7 : ***Trouver u et v***

Dans chacun des cas, déterminer l'expression des fonctions v et u telles que $f = v \circ u$.
Dans cet exercice, on ne tient pas compte des ensembles de définition.

1) $f : x \longmapsto \dfrac{4}{x-3}+5$

2) $f : x \longmapsto (2x-5)^2-3$

3) $f : x \longmapsto -\dfrac{1}{(3-x)^2}$

4) $f : x \longmapsto \sqrt{3x-5}$

5) $f : x \longmapsto 3\sqrt{x}-5$

6) $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x-5}$

7) $f : x \longmapsto 2\mathrm{e}^{x}-5$

8) $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$

Ex 5-8 : ***Dérivées de fonctions composées***

Sans se préoccuper des ensembles de définition et de dérivabilité, déterminer dans chacun des cas de l'exercice 7 les dérivées des fonctions u , v puis f .

1) $f : x \longmapsto \dfrac{4}{x-3}+5$: $v(x)=4x+5$ et $u(x)=\dfrac{1}{x-3}$

2) $f : x \longmapsto (2x-5)^2-3$: $v(x)=x^2-3$ et $u(x)=2x-5$

3) $f : x \longmapsto -\dfrac{1}{(3-x)^2}$: $v(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ et $u(x)=3-x$

4) $f : x \longmapsto \sqrt{3x-5}$: $v(x)=\sqrt{x}$ et $u(x)=3x-5$

5) $f : x \longmapsto 3\sqrt{x}-5$: $v(x)=3x-5$ et $u(x)=\sqrt{x}$

6) $f:x \longmapsto e^{2x-5}$: $v(x)=e^x$ et $u(x)=2x-5$

7) $f:x \longmapsto 2e^x-5$: $v(x)=2x-5$ et $u(x)=e^x$

8) $f:x \longmapsto e^{-x}$: $v(x)=e^x$ et $u(x)=-x$

Dérivées successives

Ex 5-9 : ***Dérivées successives***

1) Dans chacun des cas ci-dessous, démontrer que la fonction proposée est dérivable sur I, et calculer sa dérivée . Étudier alors si la fonction dérivée admet une dérivée seconde sur I, et si c'est le cas, calculer cette dérivée seconde.

a) $f:x \longmapsto x^4-3x^3+2$ sur $\mathbb{R}$

b) $g:x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

c) $h(x)=\sqrt{x}$ sur $[1;3]$

d) $i:x \longmapsto (-2x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$

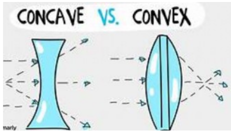
2) Lorsque c'est possible, on peut continuer la dérivation . On obtient alors les dérivées successives de la fonction f : dérivée troisième $f^{(3)}$, dérivée quatrième $f^{(4)}$ …

Calculer, lorsque c'est possible, les dérivées troisième et quatrième des fonctions vues précédemment.

Convexité, concavité, points d'inflexion

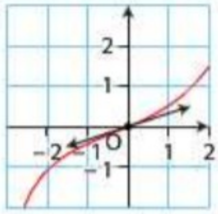
Ex 5-10 : *À partir d'une courbe*

Pour chaque courbe, déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.
Préciser les éventuels points d'inflexion .

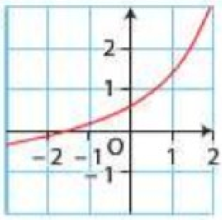


On considère que le comportement de la courbe se poursuit de manière identique en dehors de la fenêtre.

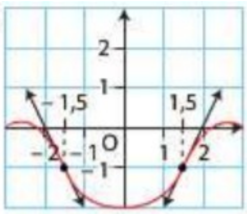
1)



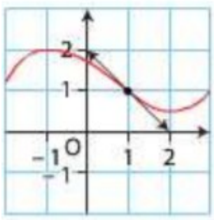
2)



3)



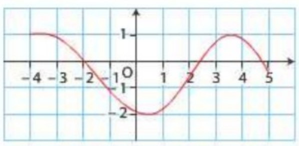
4)

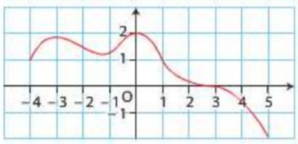


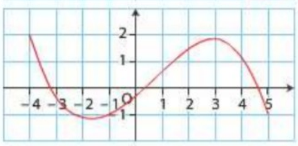
Ex 5-11 : *À partir d'une courbe*

Parmi les trois courbes ci-dessous, déterminer celle qui représente une fonction f vérifiant :

- f est concave sur $[-4\,;-2]$ et sur $[4\,;5]$
- $f\,'$ s'annule au moins trois fois
- la représentation graphique de f admet quatre points d'inflexion.







Ex 5-12 : *À partir d'un tableau de variation de f'*

Voici le tableau de variation de la fonction $f\,'$ d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f\,'(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	1

1) Déterminer le sens de variation de f

2) Déterminer la convexité de f

3) Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f .

Ex 5-13 : *À partir du tableau de signe de de f''*

Voici le tableau de signe de la fonction $f\,''$ d'une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$f\,''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

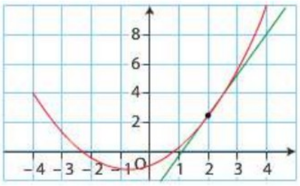
1) Déterminer le sens de variation de $f\,'$

2) Déterminer la convexité de f ainsi que les abscisses des éventuels points d'inflexion.

3) Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f .

Ex 5-14 : ***Position par rapport aux tangentes et inégalités***

Dans le repère ci-contre, on a représenté la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1$ ainsi que sa tangente au point d'abscisse 2.



1) Déterminer graphiquement la convexité de f sur l'intervalle [−4 ; 4].

2) Pourquoi peut-on étendre ce résultat à $\mathbb{R}$?

3) En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-1\geqslant\frac{11}{4}x-3$

4) Montrer alors que $x^2\geqslant 4x-4$

Ex 5-15 : ***Position par rapport aux tangentes et inégalités***

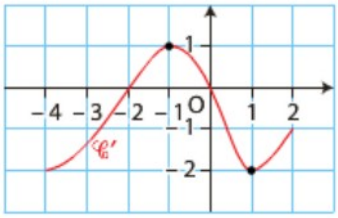
f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère.
1) Rappeler la convexité de f .

2) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

3) En déduire que, pour tout x de $[0;+\infty[$, $\sqrt{x}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

Ex 5-16 : ***Convexité à partir de la courbe représentative de f'***

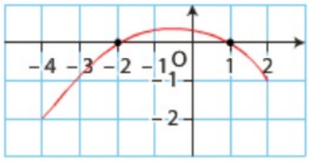
Dans un repère, on a tracé la courbe $C_{f'}$ de la fonction dérivée d'une fonction f' dérivable sur un intervalle [−4 ; 2].
Déterminer, par lecture graphique, la convexité de f .



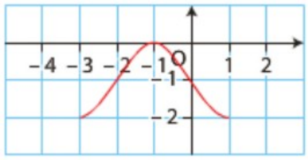
Ex 5-17 :

Dans chacun des cas, déterminer la convexité de la fonction et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion.

1) f est une fonction deux fois dérivable sur [−4 ; 2] dont la dérivée f'' est représentée ci-contre.

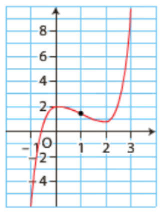


2) g est une fonction deux fois dérivable sur [−3 ; 1] dont la dérivée g'' est représentée ci-contre.

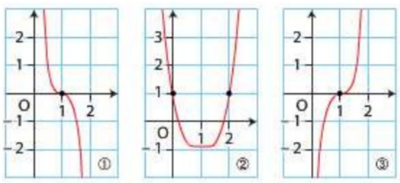


Ex 5-18 : ***Lien entre les représentations graphiques de f et f″***

Dans un repère, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur [−1 ; 3].



Parmi les trois courbes ci-dessous, laquelle représente celle de la fonction dérivée seconde f'' de f ?



Étude du signe de f″ pour déterminer la concavité

Ex 5-19 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-3x^2-12x+4$
1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .

2) En déduire la convexité de f .

3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 5-20 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4+2x^3+12x^2-8x-6$
1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .

2) En déduire la convexité de f .

3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 5-21 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-10x^3+36x^2+1$
1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .

2) En déduire la convexité de f .

3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 5-22 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}+7$

1) Déterminer le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x .

2) En déduire la convexité de f .

3) Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ex 5-23 : ***Position par rapport aux tangentes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$.

On note C_f sa courbe dans un repère.
Étudier la position des tangentes à C_f en 4 et en -4 par rapport à la courbe C_f .

Ex 5-24 : ***Famille de fonctions***

Pour tout entier n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_n(x)=\frac{1}{1+e^x}+nx$
On note C_n la courbe représentative de f_n .
Montrer que C_n admet un point d'inflexion pour tout entier n .

Ex 5-25 : ***Au moins deux points d'inflexion***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx$ où a, b, c et d sont des réels avec $a\neq 0$.

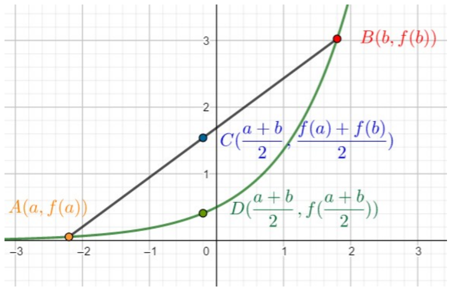
Déterminer à quelle condition la courbe représentative C_f de f dans un repère admet au moins deux points d'inflexion.

Ex 5-26 : ***Position par rapport aux sécantes et moyenne***

1) En utilisant les représentations graphiques ci-dessous, compléter les propriétés suivantes que nous allons seulement conjecturer.

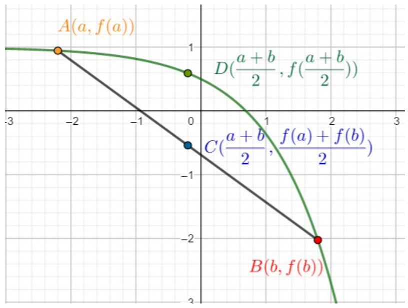
- Si f est une fonction convexe sur un intervalle I, alors :

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant$



- Si f est une fonction concave sur un intervalle I, alors :

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant$



2) Soit a et b deux réels strictement positifs, tels que $a<b$.
Dans chaque cas, démontrer l'inégalité en étudiant la convexité d'une fonction bien choisie.

a) $e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{e^a+e^b}{2}$

b) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$

c) $\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}$

d) $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 5-27 : ***Baccalauréat ES Métropole juin 2014 - Ex 5-4***

Fonction exp – TVI - Convexité

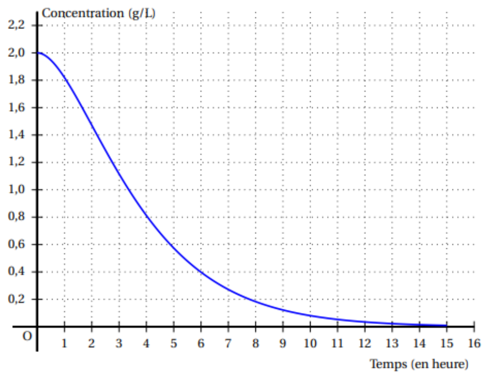
On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie en annexe 2.

A. Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. la concentration à l'instant initial ;
2. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.
   On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.



B. Étude théorique :

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,15]$ par $f(x) = (x+2)e^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Justifier que $f'(x) = -0,5xe^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,15]$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;15]$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	deriver $((x+2)*\exp(-0.5*x))$
	$\exp(-0.5x)-0.5*\exp(-0.5x)*(x+2)$
2	deriver $(\exp(-0.5*x)-0.5*\exp(-0.5*x)*(x+2))$
	$-\exp(-0.5*x)+0.25*\exp(-0.5*x)*(x+2)$
3	factoriser $(-\exp(-0.5*x)+0.25*\exp(-0.5*x)*(x+2))$
	$(0.25*x-0.5)*\exp(-0.5*x)$

   En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

C. Interprétation des résultats :

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?