CONTINUITÉ

1) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

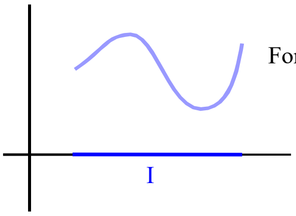
- Soit a un réel appartenant à I. On dit que f est continue en a, si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue sur I, si f est continue en tout réel a de I.

Remarque :

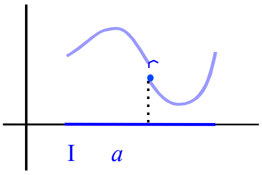
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$$

Graphiquement, si on peut tracer la courbe d'une fonction sur un intervalle *I* sans lever le stylo de la feuille, alors on peut dire que la fonction est continue.

Une fonction n'est pas continue en un réel *a* lorsque la courbe a une discontinuité en *a*, elle fait un "saut".

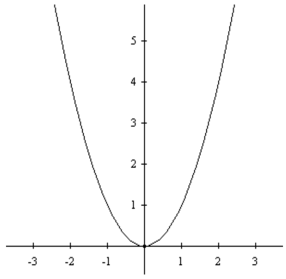


Fonction continue



Fonction discontinue en a

Exemple 1 :



- La fonction $x \longmapsto x^2$ est une fonction continue en tout réel a de $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

  On peut le justifier en démontrant que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$, c'est-à-dire en démontrant que x^2 est aussi proche que l'on veut de a^2 lorsqu'on prend x assez proche de a.

  La parabole représentant la fonction $x \longmapsto x^2$ peut être tracée sans lever le stylo de la feuille.

Exemple 2 :

- Considérons la fonction $x \longmapsto$ E(x) appelée fonction "Partie entière" et qui, à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.

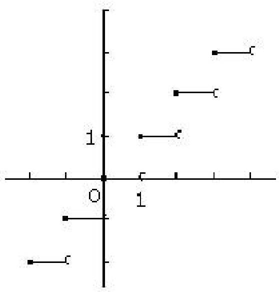
  E(2,5) = 2 E(-2,4) = -3 E(1,9999) = 1 E(2) = 2

  Si n est un nombre entier, alors E(n) = n et pour tout $x \in [n\,;n+1[$, on a E(x) = n

  Cette fonction n'est pas continue en n avec $n \in \mathbb{Z}$
  En effet lorsque x est très proche de n par valeurs inférieures, E(x) n'est pas très proche de E(n).

  La fonction **"Partie entière"** est une fonction dite **"en escalier".**
  La courbe fait "un saut" pour chaque valeur de x entière.

  Notations courantes : - calculatrices : int(x) floor(x) partEnt(x) int x
  - tableur : ent()



2) FONCTIONS DE RÉFÉRENCES

Propriété :

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus, les fonction logarithmes et exponentielles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Remarques :

- Les démonstrations de ces propriétés se font en utilisant les propriétés des limites.
- La plupart des fonctions qui seront étudiées seront des fonctions continues.
- Il est convenu que, dans un tableau de variations, les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

3) DÉRIVABILITÉ ET CONTINUITÉ

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Preuve : *non exigible*

Si f est dérivable en a, alors $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Posons $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$

Il est alors immédiat que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \right) = 0$

De plus, on a $f(a+h)-f(a)-f'(a) \times h = h\,\varepsilon(h)$ donc $f(a+h) = f(a) + f'(a) \times h + h\,\varepsilon(h)$

Les propriétés sur les limites permettent d'affirmer que $\lim_{h \to 0} (f(a) + f'(a) \times h + h\,\varepsilon(h)) = f(a)$

Donc : $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

La fonction f est donc continue en a

Attention :

La réciproque de la propriété est fausse : la fonction racine carrée est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

4) IMAGE D'UNE SUITE CONVERGENTE PAR UNE FONCTION CONTINUE

Définition :

Soit (u_n) une suite et f une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les termes de la suite (u_n) .

L'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite $(f(u_n))$.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2}{n^2+1}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Pour tout entier naturel n , on a $u_n \in \mathbb{R}^+$.

Ainsi, l'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite définie sur $\mathbb{N}$, par $f(u_n) = \sqrt{\frac{2}{n^2+1}}$.

Propriété :

Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel L et soit I un intervalle tel que $\mathrm{L} \in \mathrm{I}$ et pour tout entier naturel n , $u_n \in \mathrm{I}$.

Pour toute fonction f définie sur l'intervalle I et continue en L, la suite $(f(u_n))$ converge vers le nombre $f(\mathrm{L})$.

Exemple : *Retour sur l'exemple précédent*

On a $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Par ailleurs, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc en particulier en 0.

Ainsi la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(0) = 0$

Propriété : *suite du type* $u_{n+1}=f(u_n)$

> Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I , et soit une suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n , $u_n \in \mathrm{I}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
>
> Si (u_n) converge vers un réel $\mathrm{L} \in \mathrm{I}$ alors $\mathrm{L}=f(\mathrm{L})$.

Preuve : *non exigible*

(u_n) converge vers L, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\mathrm{L}$

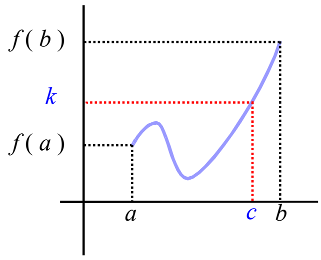
On a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(\mathrm{L})$ car f est continue sur I.

Par unicité de la limite, on a le résultat voulu, c'est à dire $f(\mathrm{L})=\mathrm{L}$

5) THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Propriété : *admise*

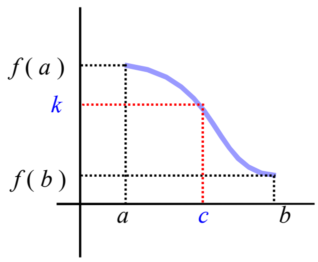
> Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I ,et a et b deux réels de I.
>
> Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.
>
> *Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :*
>
> L'équation $f(x)=k$ a **au moins** une solution c comprise entre a et b.



6) FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE – COROLLAIRE DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Propriété : *Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ou théorème des bijections*

> Soit f une fonction définie, **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$.
>
> Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou entre $f(b)$ et $f(a)$) , il existe **un et un seul** réel c dans $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.
>
> *Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :*
>
> L'équation $f(x)=k$ a **une unique** solution c comprise entre a et b.



Preuve : *non exigible*

La fonction f étant définie et continue sur $[a\,;b]$, le théorème des valeurs intermédiaires peut s'appliquer et justifie l'existence d'au moins un réel c dans $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.

Supposons que f est strictement croissante sur $[a\,;b]$.

Soit $x\in[a\,;b]$

- si $x>c$, on a $f(x)>f(c)$ donc $f(x)>k$, donc $f(x)\neq k$
- si $x<c$, on a $f(x)<f(c)$ donc $f(x)<k$, donc $f(x)\neq k$

Donc pour tout $x\neq c$, on a $f(x)\neq k$

L'équation $f(x)=k$ a donc c pour unique solution dans $[a\,;b]$.

On raisonne de même dans le cas où f est strictement décroissante sur $[a\,;b]$.

Remarques :

- Ce théorème peut s'étendre à une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert éventuellement non borné en utilisant les limites de f aux bornes de cet intervalle .

Par exemple :

- Si f est une fonction définie, continue et strictement croissante sur $]a\,;b]$, alors pour tout réel k dans l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;f(b)\right]$ l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $]a\,;b]$.

- Si f est une fonction définie, continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;a[$, alors pour tout réel k dans l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\,;\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$ l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $]-\infty\,;a[$.

Attention : Si f est strictement décroissante il ne faut pas oublier d'inverser les bornes de l'intervalle image.

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ et si $f(a)f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ a une solution et une seule sur $[a\,;b]$

- Les théorèmes précédents permettent de démontrer **l'existence** d'une ou de plusieurs solutions à une équation, mais ils ne permettent pas de déterminer la valeur de ces solutions.

On pourra en donner des valeurs approchées en utilisant des algorithmes (**Méthode de balayage, méthode de dichotomie, méthode de la sécante, méthode de Newton**) ou les outils de résolution numérique d'une équation des calculatrices (basés sur la méthode de Newton).