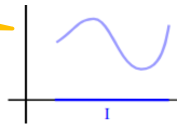
Continuité :

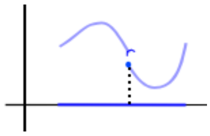
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit a un réel appartenant à I. On dit que f est **continue en a**, si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue sur I, si f est **continue** en tout réel a de I.

Graphiquement, si on peut tracer la courbe d'une fonction sur un intervalle *I* sans lever le stylo de la feuille, alors on peut dire que la fonction est continue.

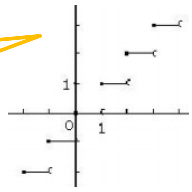




Une fonction n'est pas continue en un réel *a* lorsque la courbe a une discontinuitéen *a*, elle fait un "saut".

Dans un tableau de variations, les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone.

Un exemple fameux de fonction non continue :
La fonction "Partie entière" (qui à tout réel *x* associe le plus grand entier inférieur ou égal à *x*) est une fonction dite "en escalier". La courbe fait "un saut" pour chaque valeur de *x* entière.



Fonctions de référence :

La plupart des fonctions qui seront étudiées en terminale seront des fonctions continues.

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus, les fonction logarithmes et exponentielles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Dérivabilité et continuité :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

La réciproque de la propriété est fausse :
la fonction racine carrée est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Image d'une suite convergente par une fonction continue :

Soit (u_n) une suite et f une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les termes de la suite (u_n).

L'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite $(f(u_n))$.

Propriété :

Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel L et soit I un intervalle tel que $L \in I$ et pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.

Pour toute fonction f définie sur l'intervalle I et continue en L, la suite $(f(u_n))$ converge vers le nombre $f(L)$.

Propriété :

Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

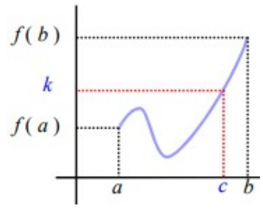
Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I, et soit une suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) **converge** vers un réel $L \in I$ alors $L = f(L)$.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I,
et a et b deux réels de I.

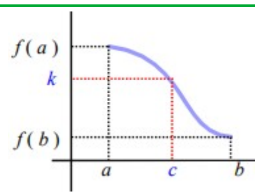
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$



Corollaire du TVI :

Soit f une fonction définie, **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou entre $f(b)$ et $f(a)$ si f est strictement décroissante), il existe **un unique réel** c dans $[a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.



Ce théorème peut s'étendre à une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert éventuellement non borné en utilisant les limites de f aux bornes de cet intervalle

Attention :

Ces théorèmes permettent de démontrer **l'existence** d'une ou de plusieurs solutions d'une équation, mais ils ne permettent pas de déterminer la valeur de ces solutions.
On pourra en donner des valeurs approchées en utilisant des algorithmes (Méthode de balayage, méthode de dichotomie, méthode de la sécante, méthode de Newton) ou les outils de résolution numérique d'une équation des calculatrices (basés sur la méthode de Newton)

Avec une Tinspire :

Define $f(x)=x^3-x^2-1$	*Terminé*
nSolve$(f(x)=0,x,1,2)$	1.46557123188

donne une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $[1;2]$