Chapitre 7 - PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

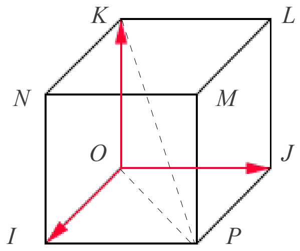
1) REPÈRES ET BASES ORTHONORMÉS DE L'ESPACE

Définition :

Un repère $(O\,;\vec{OI}\,,\vec{OJ}\,,\vec{OK})$ de l'espace est dit **orthonormé** lorsque les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires **et** que $OI=OJ=OK=1$.

On dit aussi la base $(\vec{OI}\,,\vec{OJ}\,,\vec{OK})$ est **orthonormée**.

Un cube dont l'arête mesure une unité de longueur fournit un modèle de repère orthonormé de l'espace.



Remarque :
Lorsque le repère $(O\,;\vec{OI}\,,\vec{OJ}\,,\vec{OK})$ de l'espace est orthonormé, chaque axe est perpendiculaire à toute droite passant par le point O et contenu dans le plan défini par les deux autres axes.

Par exemple, la droite (OK) est perpendiculaire à toute droite du plan (OIJ) passant par O.

Propriétés :

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{OI}\,,\vec{OJ}\,,\vec{OK})$,

- si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ alors : $\|\vec{u}\|=$
- si les points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $(x_B\,;y_B\,;z_B)$, alors :

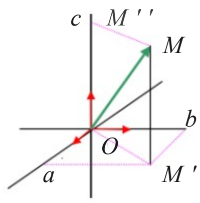
$$AB=$$

C'est une extension des propriétés vues dans le plan

Preuve :

- On note M le point tel que $\vec{OM}=\vec{u}$.

Les coordonnées de $\vec{OM}$ sont $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\|\vec{u}\|^2=OM^2$



Puisque le repère est orthonormal, le triangle $OM'M$ est rectangle en M' .
Donc $OM'^2=a^2+b^2$ et $M'M^2=OM''^2=c^2$
On en déduit, d'après le théorème de Pythagore que :

$\|\vec{u}\|^2=OM^2=OM'^2+OM''^2=a^2+b^2+c^2$, puis $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

- $AB=\|\vec{AB}\|$ … : le résultat découle de ce que nous venons de montrer

Exemple : Dans le cube ci-dessus , on a $P\,(1\,;1\,;0)$ et $K\,(0\,;0\,;1)$.

On en déduit que $PK=$

2) PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

A) DÉFINITION

Les définitions et propriétés vectorielles concernant le produit scalaire sont valables dans le plan et dans l'espace.
Les démonstrations dans le plan et dans l'espace étant souvent très similaires et la plupart des résultats ayant été vus en classe de Première, ils sont rappelés et étendus à l'espace sans démonstration.

Définition : Formules de polarisation

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace . **Le produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par l'un des formules de polarisation ci-dessous :

$\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=}$ ou encore $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=}$

Remarque :
Pour tout vecteur de l'espace, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même, $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$. On a :

$$\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\|\vec{u}\|=\|\vec{u}\|^2$$

Ce qui donne, pour deux points A et B :

$$\vec{AB}^2=$$

B) EXPRESSION DU PRODUIT SCALAIRE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé quelconque . On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=$$

C) PRODUIT SCALAIRE ET COSINUS

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont nécessairement coplanaires, c'est à dire qu'il existe A, B et C tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et (au moins) un plan P contenant A, B et C .
La définition du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans l'espace coïncide avec celle du produit scalaire de ces mêmes vecteurs dans le plan P et on en déduit que l'expression du produit scalaire établie avec le cosinus dans le plan est encore valable dans l'espace.

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace et α la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=$$

Remarques :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=$

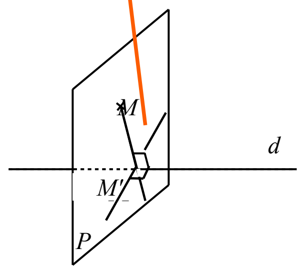
D) PROJECTION ORTHOGONALE SUR UNE DROITE

Définition :

Soit d une droite de l'espace.
La projection orthogonale sur la droite *d* est la transformation qui associe à tout point M de l'espace le point M' intersection de la droite d et du plan P perpendiculaire à d et passant par M .

M' est appelé **projeté orthogonal** de M sur la droite d .

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.



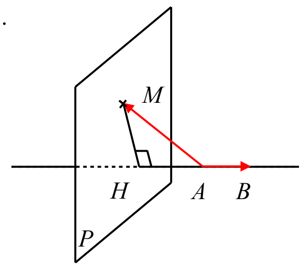
Remarques :

- Si M appartient à la droite d , M est invariant par la projection orthogonale sur d . (c'est à dire M' et M sont confondus)
- Si M n'appartient pas à la droite d , la droite d est perpendiculaire à la droite (MM') qui est incluse dans le plan P .
- MM' est la plus courte distance de M à un point de d, On dit que MM' est **la distance** de M à la droite d .

Propriété :

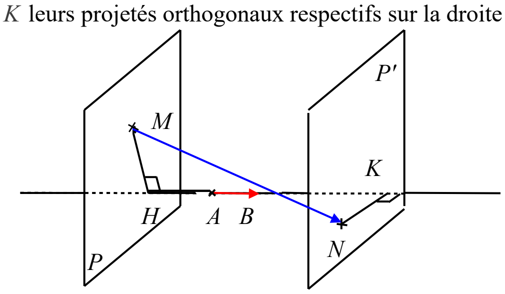
Soit A, B et M trois points de l'espace tels que A et B sont distincts.

Si on note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB), alors on a :



Remarques :

- Dans l'espace, on peut aussi remplacer $\overrightarrow{AM}$ par son projeté orthogonal sur un plan qui contient (AB).
- Si M et N sont des points de l'espace, et H et K leurs projetés orthogonaux respectifs sur la droite (AB) , alors on a :



E) RÈGLES DE CALCUL

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel, on a :

- **Symétrie:** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- **Bilinéarité:** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

  $(k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et $\vec{u}\cdot(k\cdot\vec{v})=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Remarque : Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables** (bien familiers …)

$(\vec{u}+\vec{v})^2=$ $\qquad$ $(\vec{u}-\vec{v})^2=$ $\qquad$ $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=$

3) ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

A) DROITES ORTHOGONALES – VECTEURS ORTHOGONAUX

Définition :

Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.
On note : $d \perp d'$
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les directions sont orthogonales sont dits orthogonaux. On note $\vec{u}\perp\vec{v}$.
Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Orthogonal ou **perpendiculaire** ?

On utilise le mot perpendiculaire quand il y a une intersection non vide, ce qui est forcément le cas entre une droite et un plan, ou entre deux plans.

Il faut être plus prudent dans le cas de deux droites.

Remarques :
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de d et d', alors : $d\perp d' \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$
- L'adjectif "perpendiculaire" ne s'utilise que pour les droites orthogonales et sécantes (donc coplanaires) .
  Dans la suite du chapitre, on parlera, pour simplifier, de droites orthogonales qu'elles soient sécantes ou non.

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace . On a :

Remarque :
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, $\vec{0}\cdot\vec{u}=0$. Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Conséquences de la définition :

Propriétés :

- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

ATTENTION : Certaines règles vraies dans le plan ne sont pas vraies dans l'espace.
Par exemple, dans le plan, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles ; ce qui n'est pas vrai dans l'espace.

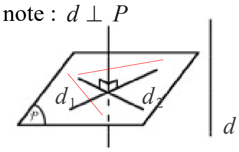
B) DROITE ORTHOGONALE À UN PLAN

Définition et propriété :

Une droite d est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

On note : $d\perp P$



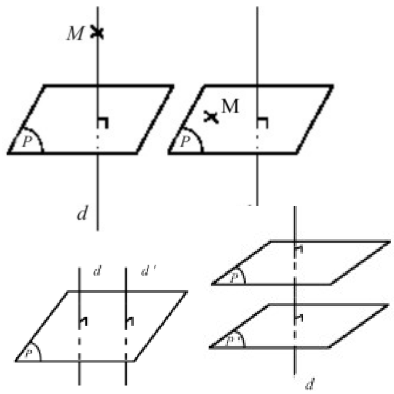
Preuve : *« Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan. »*

Soit une droite d orthogonale à un plan P ; elle est donc orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.
Soit $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{u}$ des vecteurs directeurs respectifs de d_1, d_2 et d.
On a $d_1\perp d \Rightarrow \vec{v_1}\perp\vec{u} \Rightarrow \vec{v_1}\cdot\vec{u}=0$

Et $d_2 \perp d \Rightarrow \vec{v_2} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{v_2} \cdot \vec{u} = 0$
Soit Δ une droite du plan P dirigée par un vecteur directeur $\vec{w}$.
d_1 et d_2 étant sécantes, les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont deux vecteurs directeurs de P.
Il existe donc deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{v_1} + b\,\vec{v_2}$.
On a alors $\vec{w} \cdot \vec{u} = a\,\vec{v_1} \cdot \vec{u} + b\,\vec{v_2} \cdot \vec{u} = 0$, ce qui prouve que $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux et donc que d et Δ sont orthogonaux.

<u>Quelques propriétés :</u>

- Il existe une unique droite passant par un point donné et orthogonale à un plan donné.
- Il existe un unique plan passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.



<u>Remarques :</u>

- En fait, il faut retenir que la relation d'orthogonalité ne lie pas seulement une droite et un plan, mais une famille de plans tous parallèles entre eux à une famille de droites toutes parallèles entre elles.
- Pour monter qu'une droite d est orthogonale à un plan P, il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de d est orthogonal à un couple de vecteurs directeurs de P.
- Un plan P est perpendiculaire à un plan Q ($Q \perp P$), s'il existe une droite de P orthogonale à Q.

C) VECTEUR NORMAL À UN PLAN

<u>Définition :</u>

<u>Un vecteur normal</u> à un plan P est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale au plan P.

Si deux vecteurs sont des vecteurs normaux à un même plan P, alors ils sont colinéaires.

<u>Remarques :</u>

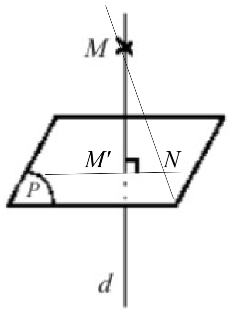
- Deux plans de vecteurs normaux orthogonaux sont
- On peut entièrement définir un plan par la donnée d'un point A et d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan.
  Il s'agit de l'ensemble des points *M* de l'espace telle que

4) PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN PLAN

<u>Définition :</u>

Soit P un plan de l'espace .
<u>La projection orthogonale sur le plan *P*</u> est la transformation qui associe à tout point M de l'espace le point M' intersection du plan P et de la droite perpendiculaire à P passant par M.

M' est appelé **<u>projeté orthogonal</u>** de M sur le plan P.



<u>Remarque :</u> Si M appartient au plan P , M est invariant par la projection orthogonale sur P.

<u>Propriété-définition :</u>

Soit P un plan de l'espace, M un point de l'espace et *M'* sont projeté orthogonal sur le plan *P*.

MM' est la plus courte distance de *M* à un point de *P*, On dit que MM' est la **<u>la distance</u>** de M au plan *P*.

<u>Preuve :</u> ***exigible***