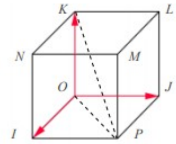
Repères et bases orthonormées de l'espace :

Un repère $(O;\vec{OI},\vec{OJ},\vec{OK})$ de l'espace est dit **orthonormé** lorsque les droites (OI), (OJ) et (OK) sont deux à deux perpendiculaires **et** que $OI=OJ=OK=1$.
On dit aussi la base $(\vec{OI},\vec{OJ},\vec{OK})$ est **orthonormée**.



Propriétés :

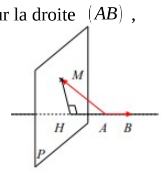
Dans un repère orthonormé, $(O;\vec{OI},\vec{OJ},\vec{OK})$

- si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ alors : $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- si les points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A;y_A;z_A)$ et $(x_B;y_B;z_B)$, alors : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Produit scalaire dans l'espace :

Les définitions et propriétés vectorielles concernant le produit scalaire sont valables dans le plan et dans l'espace.

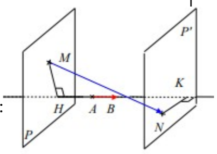
Formules de polarisation	Dans un repère orthonormé	Avec le cosinus	Projection
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$ ou encore $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$	Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé quelconque . On a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$	Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace et α la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$	Soit A, B et M trois points de l'espace tels que A et B sont distincts.Si on note H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB), alors on a : $\vec{AB}\cdot\vec{AM}=\vec{AB}\cdot\vec{AH}$ *Dans l'espace, on peut aussi remplacer $\vec{AM}$ par son projeté orthogonal sur un plan qui contient (AB).*



Avec des vecteurs colinéaires

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

Si M et N sont des points de l'espace, et H et K leurs projetés orthogonaux respectifs sur la droite (AB), alors on a :



$\vec{AB}\cdot\vec{MN}=\vec{AB}\cdot\vec{HK}$

Carré scalaire :

$\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\|\vec{u}\|=\|\vec{u}\|^2$

Pour deux points A et B :

$\vec{AB}^2=\|\vec{AB}\|^2=AB^2$

Règles de calcul :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel, on a :

- **Symétrie:** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- **Bilinéarité:** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
  $(k\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ et $\vec{u}\cdot(k\cdot\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Orthogonal ou perpendiculaire ?
On utilise le mot **perpendiculaire** quand il y a une intersection non vide, ce qui est forcément le cas entre une droite et un plan, ou entre deux plans.
Il faut être plus prudent dans le cas de deux droites.

Droites orthogonales :

Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs parallèles menées par un point quelconque de l'espace sont perpendiculaires.
On note : $d\perp d'$

Conséquences :

- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

ATTENTION : Certaines règles vraies dans le plan ne sont pas vraies dans l'espace.
Par exemple, dans le plan, deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles ; ce qui n'est pas vrai dans l'espace.

Vecteurs orthogonaux :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les directions sont orthogonales sont dits **orthogonaux**. On note $\vec{u}\perp\vec{v}$.
Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Propriété :

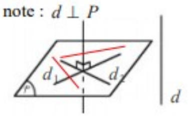
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace . On a : $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

Pour monter qu'une droite *d* est orthogonale à un plan *P*, il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de *d* est orthogonal à un couple de vecteurs directeurs de *P*.

Droite orthogonale à un plan :

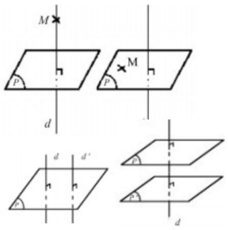
Une droite d est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de ce plan.

On note : $d\perp P$



Propriétés :

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.



- Il existe une unique droite passant par un point donné et orthogonale à un plan donné.
- Il existe un unique plan passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

Si deux vecteurs sont des vecteurs normaux à un même plan , alors ils sont colinéaires.

Vecteur normal à un plan :

Un vecteur normal à un plan P est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale au plan P.

Propriété :

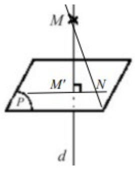
Deux plans de vecteurs normaux orthogonaux sont perpendiculaires.

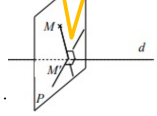
Une droite est perpendiculaire à un plan **si elle perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.**

Projection orthogonale :

Si M appartient au plan P (ou à la droite d), M est invariant par la projection orthogonale sur P .

Sur un plan	Sur une droite
Soit P un plan de l'espace . **La projection orthogonale sur le plan P** est la transformation qui associe à tout point M de l'espace le point M' intersection du plan P et de la droite perpendiculaire à P passant par M . M' est appelé **projeté orthogonal** de M sur le plan P .	Soit d une droite de l'espace. **La projection orthogonale sur la droite *d*** est la transformation qui associe à tout point M de l'espace le point M' intersection de la droite d et du plan P perpendiculaire à d et passant par M . M' est appelé **projeté orthogonal** de M sur la droite d .





Distances :

Sur un plan	Sur une droite
MM' est la plus courte distance de M à un point de P, On dit que MM' est la **la distance** de MM' au plan P.	MM' est la plus courte distance de M à un point de d, On dit que MM' est **la distance** de MM' à la droite d.