LOGARITHME NÉPÉRIEN

1) DÉFINITION

Rappel :

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$.
C'est-à-dire que pour tout $b \in]0\,;+\infty[$, il existe **un unique** réel a tel que $e^a = b$.
On note $a = \ln b$, ce qui se lit logarithme népérien de b . Ainsi à tout réel x strictement positif, on peut associer un unique réel noté $\ln(x)$.

Définition :

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre $\ln(x)$.

$$\ln :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

Remarques :

- La fonction $\ln$ est une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- L'équivalence $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ y = \ln\ x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ e^y = x \end{cases}$ traduit le fait que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

Propriétés :

• Pour tout réel x strictement positif, on a $e^{\ln x} = x$ • Pour tout réel x , on a $\ln(e^x) = x$	• $\ln 1 = 0$ • $\ln e = 1$

Résulte de la définition

Remarque :

La fonction exponentielle transformant une somme en produit, on peut penser que la fonction logarithme népérien qui est sa fonction réciproque, transforme un produit en somme.

2) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Propriétés :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln a$

Preuve :

Les démonstrations se font principalement en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

- $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b$. Or si $e^y = x$, alors $y = \ln x$. On a donc $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$
- $e^{-\ln a} = \dfrac{1}{e^{\ln a}} = \dfrac{1}{a}$ donc $-\ln a = \ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$
- $e^{\ln a - \ln b} = \dfrac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}} = \dfrac{a}{b}$ donc $\ln a - \ln b = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$
- $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$ *donc* $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n \ln a} = (e^{\ln a})^n = a^n$ donc $\ln a^n = n \ln a$

3) ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Propriété :

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La croissance de la fonction ln est lente.
Par exemple : $\ln(10^8) \approx 18{,}42$

Preuve :

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.
Raisonnons par l'absurde :

Supposons que $\ln a \geqslant \ln b$
La fonction exponentielle étant croissante on aurait $e^{\ln a} \geqslant e^{\ln b}$ donc $a \geqslant b$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

On ne peut donc pas avoir $\ln a \geqslant \ln b$.
On a donc $\ln a < \ln b$
On en déduit que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conséquences :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$
- si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$

Propriété :

La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Preuve : ***exigible***

Soit $x > 0$ et $a > 0$.
Déterminons $\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$
En posant $X = \ln(x)$ et $A = \ln(a)$, on obtient : $\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim\limits_{X \to A} \frac{X - A}{e^X - e^A}$

Or on sait que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$
Donc $\lim\limits_{X \to A} \frac{e^X - e^A}{X - A} = e^A = e^{\ln(a)} = a$ et $\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim\limits_{X \to A} \frac{X - A}{e^X - e^A} = \frac{1}{a}$

La fonction $\ln$ est donc dérivable en a , pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.
On en déduit que la fonction $\ln$ est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Remarque :
On sait que pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
En supposant la fonction ln dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en utilisant la propriété de dérivation des fonctions composées, on peut écrire pour tout $x > 0$:

$$(e^{\ln x})' = (\ln x)' \times e^{\ln x} \Leftrightarrow (x)' = (\ln x)' \times x \Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$ *(et en acceptant les abus de notation pour faciliter)*

Propriétés :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Preuve :

- Soit $M > 0$.
  Pour tout $x > 0$, on a : $\ln x > M \Leftrightarrow x > e^M$

  Ainsi, si $x > e^M$ on a $\ln x > M$
  Ce résultat est vrai pour tout $M > 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

- Posons $X=\dfrac{1}{x}$ c'est-à-dire $x=\dfrac{1}{X}$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives X tend vers $+\infty$.

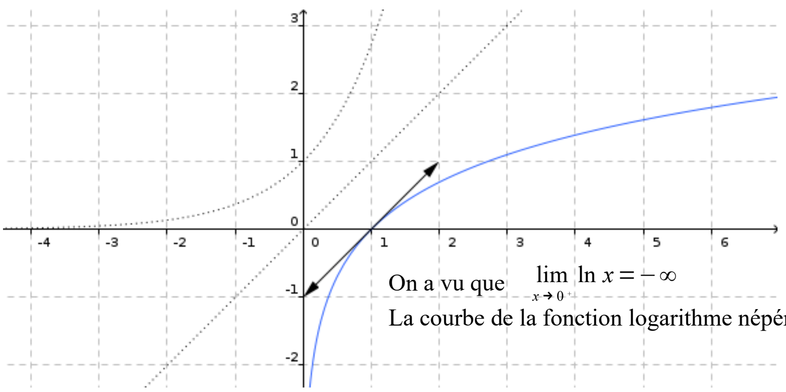
On a $\ln x=\ln\left(\dfrac{1}{X}\right)=-\ln X$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=\lim\limits_{X\to+\infty}-\ln X$. On sait que $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

Tableau de variations :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
ln	$-\infty \nearrow +\infty$

Représentation graphique :



Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

On a vu que $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

La courbe de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (Oy).

Propriété : *(en plus*)

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

Preuve :

Par définition du nombre dérivé en 1, on peut écrire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}=\dfrac{1}{1}=1$ (car $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$)

Propriétés :

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$	• $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$
• Pour tout entier naturel non nul n, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$	• Pour tout entier naturel non nul n, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\ln x=0$

Preuve :

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

Posons $X=\ln x$ on a alors $e^X=x$
Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$.

On peut écrire $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{X}{e^X}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^X}$.

Or on sait que $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^X}=0$ et par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

OU *(sans utiliser la fonction exponentielle)*

On peut écrire pour tout $x>0$: $\ln x < x$ (trivial graphiquement) et donc $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$, c'est à dire $\frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x}$.
Pour $x>1$, on a alors :

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

- Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

Pour $n>1$, on peut écrire : $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x}$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$, par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

- Montrons que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ ***exigible***

Posons $X = \frac{1}{x}$ on a alors $x = \frac{1}{X}$
Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives , $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$.
On peut écrire $x \ln(x) = \frac{1}{X} \times \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{1}{X} \times \ln(X) = -\frac{\ln(X)}{X}$

Or on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

- Montrons que $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$

Pour $n>1$, on peut écrire : $x^n \ln x = x^{n-1}\, x \ln x$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{n-1} = 0$, par produit, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$.

4) DÉRIVÉE DE $x \longmapsto \ln(u(x))$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction f : $x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Preuve :

Immédiat en utilisant, la dérivée de $x \longmapsto g(u(x))$