

Lien avec la fonction exponentielle :

La fonction exponentielle est définie et continue sur \mathbb{R} . De plus, elle est strictement croissante et à valeurs dans $]0; +\infty[$. On dit que la fonction exponentielle est une **bijection** de \mathbb{R} sur $]0; +\infty[$. C'est-à-dire que pour tout $b \in]0; +\infty[$, il existe **un unique** réel a tel que $e^a = b$. On note $a = \ln b$, ce qui se lit logarithme népérien de b . Ainsi à tout réel x strictement positif, on peut associer un unique réel noté $\ln(x)$.

Définition :

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre $\ln(x)$.

$$\ln :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ y = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ e^y = x \end{cases}$$

- Pour tout réel x **strictement positif**, on a $e^{\ln x} = x$
- Pour tout réel x , on a $\ln(e^x) = x$

Propriétés algébriques :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln a$

La croissance de la fonction \ln est lente. Par exemple : $\ln(10^8) \approx 18,42$

Étude de la fonction logarithme népérien :

La fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Conséquences :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$
- $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$

Continuité et dérivabilité :

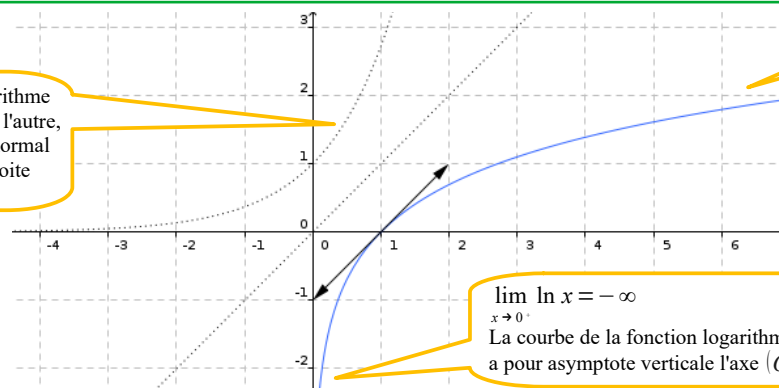
La fonction \ln est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Limites :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (hors programme)
- Pour tout entier naturel non nul n , on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ (en particulier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)
- Pour tout entier naturel non nul n , on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$ (en particulier $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$)

Représentation graphique :

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
La courbe de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (Oy) .

Dérivée de $\ln(u(x))$:

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

La fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Calculatrices et Python :

Il existe une autre fonction notée \log (logarithme décimal) définie par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Certaines calculatrices ou Python utilise la notation \log pour parler de \ln et la notation \log_{10} pour parler du logarithme décimal. Soyez prudent !

Attention



En python $\log(x)$ retourne $\ln(x)$ et $\log(x,10)$ retourne $\frac{\ln(x)}{\ln(10)} = \log_{10}(x)$