Définition - propriétés algébriques

Ex 8-1 : ***QCM***

Plusieurs réponses sont possibles.

1) Équations ...

a) e^3 est la solution de l'équation $\ln x = 3$

b) e^{-3} est la solution de l'équation $\ln x = -3$

c) $\ln(3)$ est la solution de l'équation $e^x = 3$

d) $\ln(-3)$ est la solution de l'équation $e^x = -3$

e) $-\ln 3$ est la solution de l'équation $e^x = \dfrac{1}{3}$

f) L'équation $\ln x = m$ où $m \in \mathbb{R}$, admet toujours une unique solution $x = e^m$

g) L'équation $e^x = m$ où $m \in \mathbb{R}$, admet toujours une unique solution $x = \ln m$

2) Formules ...

a) $\ln(a+b) = \ln(a) \times \ln(b)$

b) $\ln(ab) = \ln(a)\ln(b)$

c) $\ln(a-b) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$

d) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

3) $\ln(ab^5) = \ldots$

a) $5\ln(ab)$

b) $5(\ln(a) + \ln(b))$

c) $5\ln(a)\ln(b)$

d) $\ln(a) + 5\ln(b)$

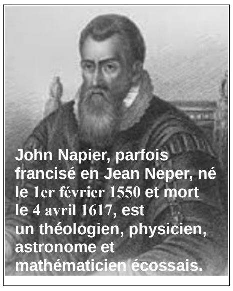
4) $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ldots$

a) $-(\ln(a))^2$

b) -1

c) $-2\ln(a)$

d) 0



5) la moitié de $\ln(a)$ est ...

a) $\ln(a) - \ln(2)$

b) $\ln(a^{-2})$

c) $\ln(\sqrt{a})$

d) $\sqrt{\ln(a)}$

Ex 8-2 : ***Calculs avec les formules***

Simplifier :

1) $e^{\ln(2)} - e^{\ln(7)}$

2) $3e^{\ln(5)} + 5e^{-\ln(3)}$

3) $\ln(2\sqrt{3}) + 2\ln(\sqrt{3})$

4) $\ln\left(\dfrac{3e^2}{\sqrt{e}}\right)$

5) $\dfrac{\ln(125)}{\ln(25)}$

6) $\dfrac{(\ln(e^3))^2}{\ln(e^4)}$

7) $\ln(1+e^x) - x - \ln(1+e^{-x})$

Ex 8-3 : ***Équations et inéquations***

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous :

1) $(e^x - 2)(e^{2x} - 8) = 0$

2) $(e^{x-1} - 3)^2 = 0$

3) $(e^{x^2+2x+5} + e^{-x})(3e^x + 4) = e$

4) $8-4\,e^{\ln(0,5)\times x+1}>0$

5) $e^{3x+5}<3\,e^{x}$

6) $(2\,e^{x}-10)(5-e^{x})<0$

Ex 8-4 :

Compléter …
1) La courbe représentative de la fonction exponentielle passe par le point

A(ln2 ; …) et B(… ; π)

2) L'ensemble des réels x tels que $\ln(x)\leqslant 0$ est …

3) Si $e^{a}=b$ $(b>0)$, alors ln(…) = …

4) $\forall$ x $\in$ … , $\ln(e^{x})=x$

5) $\forall$ x $\in$ … , $e^{\ln(x)}=x$

6) $\forall$ x $\in$ … , $\ln(x)>0$

Ex 8-5 : ***Calculs***

1) Exprimer en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$:

a) $\ln\left(\dfrac{8}{9}\right)$

b) $\ln\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{27}\right)$

c) $\dfrac{\ln 64}{\ln 81}+\dfrac{\ln 49}{\ln 7}$

2) Simplifier :

a) $4\ln(e^{2})+\ln(\sqrt{e})$

b) $\ln\left(\dfrac{\sqrt{e}}{e^{3}}\right)$

c) $\dfrac{\ln(e^{4})}{(\ln(e^{3}))^{2}}$

3) Calculer :

a) $\ln 3+\ln 9+\ln 27$

b) $\ln(\sqrt{5}-2)+\ln(\sqrt{5}+2)$

Ex 8-6 : ***Vrai ou faux***

Justifier
1) $\forall x\in\mathbb{R}^{*}$, $\ln(x^{3})=3\ln(x)$

2) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\ln(1+e^{x})=x+\ln(1+e^{-x})$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\ln(1+e^{8x})-4x=\ln(e^{4x}+e^{-4x})$

Étude de la fonction logarithme népérien

Ex 8-7 : ***QCM***

Plusieurs réponses sont possibles.

1) L'ensemble de définition de la fonction ln est :

a) $[1;+\infty[$ b) $\mathbb{R}^{+}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R}^{-}$ e) $\mathbb{R}^{+*}$ f) $]0;+\infty[$

2) La fonction ln :

a) est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
c) est strictement positive sur $]1,+\infty[$.
d) est égale à sa dérivée.
e) prend la valeur 1 en 0.

3) Soit C la courbe représentative de la fonction ln.

a) La droite $\Delta : y=0$ est une asymptote à C .
b) C coupe l'axe des abscisses.
c) C admet une tangente de coefficient directeur -2.
d) C et la courbe de la fonction exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $d : y=x$.

Ex 8-8 : ***Limites***

Associer chaque limite au résultat qui convient :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$ •	• 1
$\lim\limits_{x\to 0+} x^n \ln x \quad n\in\mathbb{N}^*$ •	• $+\infty$
$\lim\limits_{x\to 0+} \ln x$ •	• 0
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ •	• n'existe pas
$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ •	• $-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} \quad n\in\mathbb{N}^*$ •	• -1

Ex 8-9 : ***Déterminer une limite***

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{3}{x}-4x-3x^2\ln x\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(4x^3-\dfrac{5\ln x}{x^5}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\ln x-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 1-} \left(\ln x-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln x-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to 0+} (2x+\ln x)^2$

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(3-e^x)$

8) $\lim\limits_{x\to \ln 3-} \ln(3-e^x)$

9) $\lim\limits_{x\to 1+} \left(\ln(x-1)\left(\ln 2-\dfrac{1}{x}\right)\right)$

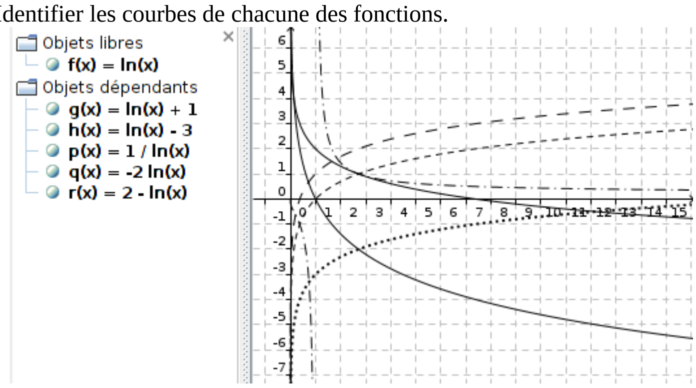
10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x-1)\left(\ln 2-\dfrac{1}{x}\right)\right)$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{3x-6}{7x}\right)$

12) $\lim\limits_{x\to 2+} \ln\left(\dfrac{3x-6}{7x}\right)$

Ex 8-10 : ***A partir de la courbe représentative de la fonction ln***

Identifier les courbes de chacune des fonctions.



Ex 8-11 : ***Variations sans calculer la dérivée***

Soit les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\ln(x)+\ln(2)$, $g(x)=\dfrac{\ln(x)}{5}$ et $h(x)=1-3\ln(x)$

Déterminer le sens de variation de chacune de ces fonctions à partir de celui de la fonction ln.

Ex 8-12 : ***Dérivées***

Dans chacun des cas, justifier que f est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

1) $f(x)=\dfrac{3x}{\ln(x)}$ sur $\mathrm{I}=]1;+\infty[$

2) $f(x)=x^2\ln(x)-\ln(3)$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$

3) $f(x)=\dfrac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$ sur $\mathrm{I}=]e;+\infty[$

4) $f(x)=(\ln x)^2-\dfrac{1}{\ln x}$ sur $\mathrm{I}=]1;+\infty[$

Ex 8-13 : ***Tangente à la courbe***

Déterminer les coordonnées du point de la représentation graphique C de la fonction ln en lequel la tangente T a pour coefficient directeur 2.

Ex 8-14 : ***Signe d'une fonction grâce au sens de variation***

Dans chaque cas, déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) $f(x)=2x^2-\ln x$

2) $f(x)=x\ln x+\mathrm{e}$

Ex 8-15 : ***Déterminer une limite comportant une forme indéterminée***

Déterminer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 0+}(x^2-3x\ln x)$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}(4x^3-5x\ln x)$

3) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{\ln 2}{x}+\ln x\right)$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{2x}$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}((\ln x)^2-3\ln x+2)$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+5)}{\mathrm{e}^x}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x-\mathrm{e}\ln x)$

8) $\lim_{x \to 0+} (3x - \mathrm{e} \ln x)$

9) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x) - 5x}{1+x}$

10) $\lim_{x \to -1+} \frac{\ln(1+x) - 5x}{1+x}$

11) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

12) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\ln x}$

Ex 8-16 : ***Déterminer une limite avec le nombre dérivé***

Déterminer $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(3+h) - \ln 3}{h}$ et $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(3x-2)}{x-1}$

Ex 8-17 : ***Inéquations comportant*** q^n

Les parties A et B sont indépendantes.

A) Déterminer le plus petit entier n tel que :

1) $3 \times \left(\frac{7}{9}\right)^n < 0,01$

2) $1 - 1,25^n < 0,99$

B) On sait que le nombre d'atomes de carbone 14, en fonction du nombre n de siècles, est donné approximativement par $q_n = q_0 \, 0,987976^n$, où q_0 est le nombre initial d'atomes.

1) Déterminer la demi-vie du carbone 14 (durée au bout de laquelle la moitié des atomes de carbone 14 s'est désintégrée)

2) Déterminer l'âge des fragments trouvés par des archéologues, sachant que la teneur en carbone 14 est égale à 30 % de celle d'un fragment d'os actuel de la même masse pris comme témoin.

Ex 8-18 : ***Avec des suites***

Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

1) Déterminer la limite de la suite u .

2) $\forall n \neq 0$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$

a) Exprimer S_n en fonction de n .

b) En déduire la limite de S_n .

Fonctions du type $x : \longmapsto \ln(u(x))$

Ex 8-19 : ***Maîtriser le cours - Vrai ou faux***

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(u(x)) > 0$	4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(u(x)) = +\infty$
2) La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$	5) $\ln(u(x)) \geqslant \ln 5 \iff x \geqslant 5$
3) La dérivée de $\ln(u)$ est $\frac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}$	6) $\ln(u(x)) \leqslant 5 \iff 0 < u(x) \leqslant e^5$

Ex 8-20 : ***Résoudre une équation ou une inéquation comportant*** $\ln(u(x))$

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-5) = \ln 4$

2) $\ln(2x-5) = -3$

3) $\ln(7x+2) \geqslant \ln(3-x)$

4) $\ln\left(e^{2x}-25\right)\geqslant 0$

5) $\ln\left((x+1)(x-2)\right)\geqslant \ln 18$

6) $\ln\left(1-x^2\right)-\ln(x-3)\geqslant 0$

Ex 8-21 : ***Signe d'une fonction***

Étudier le signe des fonctions ci-dessous :

1) $f(x)=(x-3)\ln(x-1)$ définie sur $]1;+\infty[$

2) $g(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln(x-1)}$ définie sur $]1;2[\cup]2;+\infty[$

3) $h(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-3}{e^x-1}\right)$ définie sur $]1;2[\cup]2;+\infty[$

Ex 8-22 : ***Ensemble de définition***

Déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f :

1) $f(x)=\ln\left(x^2\right)-3$

2) $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)$

3) $f(x)=\ln\left(x^2-3\right)$

4) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+2)}$

5) $f(x)=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$

Ex 8-23 : ***Tableau de variations***

Donner le tableau de variations des fonctions ci-dessous :

1) $f(x)=(\ln x)^2-\ln(x^2)$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}_+^*$

2) $f(x)=(1-x)\ln(1-x)$ sur $\mathrm{I}=]-\infty;1[$

3) $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2e^x+3}\right)$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

Ex 8-24 : Avec Xcas

Soi f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=2x^2-(x^2+1)\ln(x^2+1)$

```
1 f(x):=2*x^2-(x^2+1)*ln(x^2+1)
      x -> 2*x^2-(x^2+1)*ln(x^2+1)
2 deriver(f(x),x);
      -2*x*ln(x^2+1)+2*x
3 a:=f(sqrt(e-1));simplifier(a);b:=f(sqrt(e^2-1));simplifier(b)
      (-exp(1)+2*(exp(1)-1), exp(1)-2, -2*exp(2)+2*(exp(2)-1), -2 )
4 solve(f(x)=0);
      "Unable to isolate x in -ln(x^2+1)*x^2-ln(x^2+1)+2*x^2
5 nSolve(f(x)=0,x=0);nSolve(f(x)=0,x=2)
      ( 0.0, 1.9802913 )
```

Répondre aux questions ci-dessous, en utilisant les résultats ci-dessus fourni par le logiciel de calcul formel Xcas.

1) Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que dans l'intervalle $\left[\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right]$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α .
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} .

3) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction logarithme décimal

La fonction logarithme népérien est particulièrement intéressante du fait de sa propriété de transformation d'un produit en somme. Mais comme on utilise, pour écrire les nombres, le système décimal, on lui préfère parfois une autre fonction possédant la même propriété de transformation de produit en somme mais prenant la valeur 1 lorsque $x=10$ (et donc la valeur 2 lorsque $x=100$, la valeur 3 lorsque $x=1000$ etc...)
Cette fonction sera appelée fonction logarithme décimal ou fonction logarithme de base 10.

Définition :

On appelle fonction logarithme décimal et on note log la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\log :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$$

La fonction logarithme décimal étant définie par $\log x = k \times \ln x$ avec $k=\frac{1}{\ln 10}$, il est facile d'étudier ses variations et de donner sa courbe représentative . les formules sont identiques à celles de la fonction logarithme népérien :

$\log 1=0$, $\log 10=1$, $\log(a\times b)=\log a+\log b$, $\log\frac{1}{a}=-\log a$,

$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$, $\log\sqrt{a}=\frac{1}{2}\log a$ et $\log a^n=n\log a$

Ex 8-25 : ***Vrai ou faux***

1) $\log(e)=1$

2) $\log(10^{-5})=-5$

3) $\log(10^2\times 10^3)=5$

4) $\log(x)<1 \Leftrightarrow 0<x<10$

5) $\log(x)=-3\log(5) \Leftrightarrow x=\frac{1}{125}$

6) $(\log(x))'=\log(e)\ln(x)$

Ex 8-26 : ***Niveau sonore***

Le niveau sonore N d'un bruit, exprimé en décibels (dB), est donné par $\mathrm{N}=10\log\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}\right)$, où I est l'intensité sonore exprimé en W/ m^2 , et où I_0 est l'intensité de référence correspondant à la plus petite intensité acoustique audible.
On sait que, lorsqu'on met en présence plusieurs sources sonores, les intensités s'additionnent.
1) Le niveau sonore d'un lave-linge est de 50 dB.
Quel est le niveau sonore de deux lave-linges identiques ?
Le niveau sonore a-t-il doublé ?

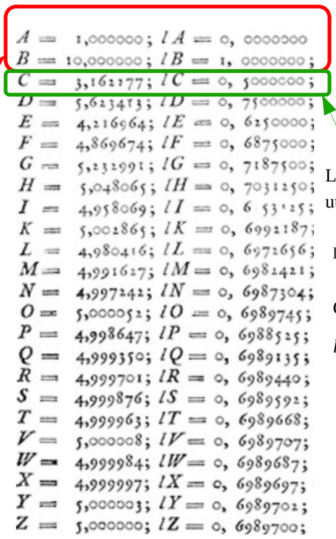
2) Le niveau sonore d'une note de musique obtenue au violon est de 70 dB . Combien faut-il de violonistes jouant ensemble la même note, pour obtenir un niveau sonore de 80 dB ?

3) Le niveau sonore d'un marteau-piqueur est de 110 dB et celui d'un klaxon de voiture est de 80 dB. Quel est le niveau sonore des deux bruits réunis ? Que remarque-t-on ?

<u>Ex 8-27 :</u> *Algorithme de Briggs*

Dans introduction à l'analyse infinitésimale (1748), Euler explique la méthode de Briggs pour calculer une valeur approchée de log(5).

Ses calculs sont donnés dans le tableau ci-dessous :



A =	1,000000 ;	lA =	0, 0000000
B =	10,000000 ;	lB =	1, 0000000 ;
C =	3,162277 ;	lC =	0, 5000000 ;
D =	5,623413 ;	lD =	0, 7500000 ;
E =	4,216964 ;	lE =	0, 6250000 ;
F =	4,869674 ;	lF =	0, 6875000 ;
G =	5,232991 ;	lG =	0, 7187500 ;
H =	5,048065 ;	lH =	0, 7031250 ;
I =	4,958069 ;	lI =	0, 6953125 ;
K =	5,002865 ;	lK =	0, 6992187 ;
L =	4,980416 ;	lL =	0, 6972656 ;
M =	4,991627 ;	lM =	0, 6982421 ;
N =	4,997242 ;	lN =	0, 6987304 ;
O =	5,000052 ;	lO =	0, 6989745 ;
P =	4,998647 ;	lP =	0, 6988525 ;
Q =	4,999350 ;	lQ =	0, 6989135 ;
R =	4,999701 ;	lR =	0, 6989440 ;
S =	4,999876 ;	lS =	0, 6989592 ;
T =	4,999963 ;	lT =	0, 6989668 ;
V =	5,000008 ;	lV =	0, 6989707 ;
W =	4,999984 ;	lW =	0, 6989687 ;
X =	4,999997 ;	lX =	0, 6989697 ;
Y =	5,000003 ;	lY =	0, 6989702 ;
Z =	5,000000 ;	lZ =	0, 6989700 ;

Les calculs sont initialisés par

$A=1$, $B=10$,

$lA=0$ et $lB=1$.

La méthode de Briggs utilise la relation

$\log(\sqrt{AB})=\frac{1}{2}(\log(A)+\log(B))$

$C=\sqrt{AB}$ et

$lC=\frac{1}{2}(lA+lB)$

Pour la suite des calculs, on procède de la façon suivante et on considère uniquement les variables A et B:

- si $\sqrt{AB}\leqslant 5$, alors :

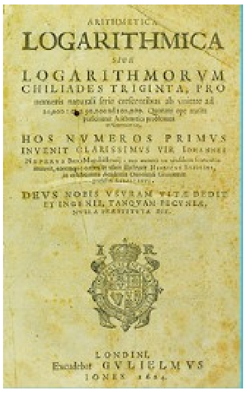
  A prend la valeur $\sqrt{AB}$ et lA prend la valeur $\frac{lA+lB}{2}$

- si $\sqrt{AB}>5$, alors :

  B prend la valeur $\sqrt{AB}$ et lB prend la valeur $\frac{lA+lB}{2}$

Ce qui donne :

A= 3.1622776601683795	lA= 0.5
B= 5.623413251903491	lB= 0.75
A= 4.216965034285822	lA= 0.625
A= 4.869675251658631	lA= 0.6875
B= 5.232991146814947	lB= 0.71875
B= 5.0480657166674705	lB= 0.703125
A= 4.958068241684655	lA= 0.6953125
B= 5.002864610575233	lB= 0.69921875
A= 4.980416061248411	lA= 0.697265625
A= 4.991627716362686	lA= 0.6982421875
A= 4.99724300503361	lA= 0.69873046875
B= 5.00005301775164	lB= 0.698974609375



1) Vérifier les 4 premières lignes de calcul.

2) Compléter l'algorithme suivant écrit en Python, afin qu'il applique l'algorithme de Briggs pour le calcul de $\log(x)$ où x est un réel compris entre 10 et 100 avec une précision de 10^{-k} .
On initialisera l'algorithme avec :

A=10, B=100, lA=1 et lB=2

```
from math import *

def CalculeLog_x( x, k ):
    A = ………...
    B = ………...
    lA = ………...
    lB = ………...
    precision = 10**(………...)
    while (B - x > ………… ):
        if (sqrt(A * B) < ……):
            …… = sqrt(A*B)
            …… = 1/2*(lA + lB)
        else:
            …… = sqrt(A*B)
            …… = 1/2*(lA + lB)
    return lB
```

3) En déduire une valeur approchée à 10^{-10} près de log(85)

EN ROUTE VERS LE BAC

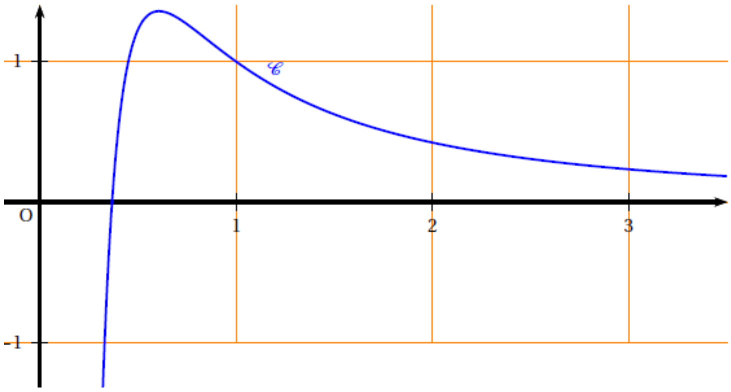
Ex 8-28 : ***Baccalauréat S – Amérique du nord 30 mai 2013 – Ex 8-4***

Fonction ln – étude de fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :

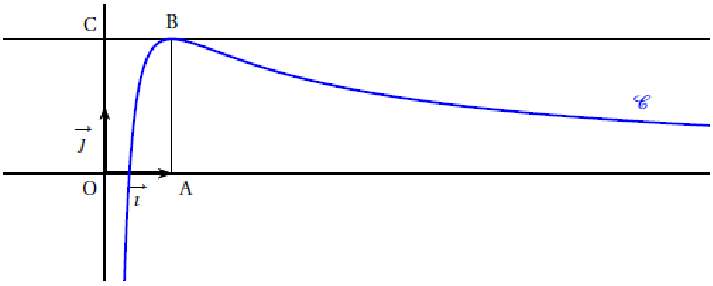


1. **a.** Étudier la limite de f en 0.
   b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.
2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,
   $$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$
   b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.
3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Ex 8-29 : *Baccalauréat S – Métropole 20 juin 2013 – Ex 8-2*

Fonction ln – utiliser une représentation graphique – étude de fonction – corollaire du TVI - algorithme

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

— les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$;
— la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
— il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. **a.** En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
   b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.
   c. En déduire les réels a et b.
2. **a.** Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
   b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0, 1]$.
   b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty]$ tel que $f(\beta) = 1$.
   Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.
4. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
from math import *

def f(x):
    y=2/x+2*log(x)/x
    return (y)

a=0
b=1
while (b-a)>0.1:
    m=(a+b)/2
    if f(m)<1:
        a=m
    else:
        b=m
print ("a=",a,"b=",b)
```

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

Ex 8-30 : ***Baccalauréat S – Antilles Guyane 11 septembre 2014 – Ex 8-3***

Fonction ln – résolution d'une équation

On considère l'équation (E_1) :

$$e^x - x^n = 0$$

où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

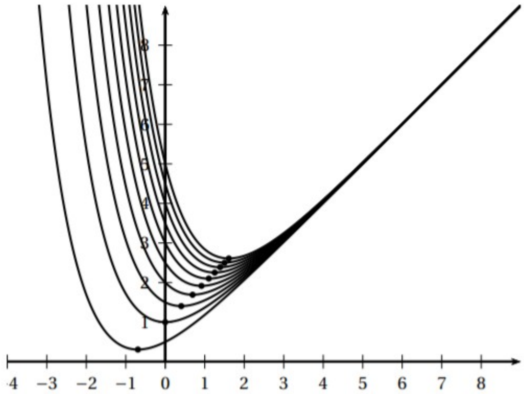
Ex 8-31 : ***Baccalauréat S – Liban 5 juin 2017 – Ex 8-3***

Problème ouvert - Fonction exp - ln - alignement

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.
Est-ce le cas ?

Ex 8-32 : ***Baccalauréat S – Antilles Guyane 6 sept 2018– Ex 8-4***

Suites – fonction ln – fonction exp

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2.$$

2. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. En déduire la convergence de la suite (u_n).

3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}.$$

c. En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

d. Calculer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0.
Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2018$, alors la suite (u_n) est croissante. »
Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$. »
Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »