

LOGARITHME NÉPÉRIEN

1) DÉFINITION

Rappel :

La fonction exponentielle est une bijection de \mathbb{R} sur $]0; +\infty[$.

C'est-à-dire que pour tout $b \in]0; +\infty[$, il existe **un unique** réel a tel que $e^a = b$.

On note $a = \ln b$, ce qui se lit logarithme népérien de b . Ainsi à tout réel x strictement positif, on peut associer un unique réel noté $\ln(x)$.

Définition :

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre $\ln(x)$.

$$\ln :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln x$$

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

Remarques :

• La fonction \ln est une bijection de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} .

• L'équivalence $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ y = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ e^y = x \end{cases}$ traduit le fait que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

Propriétés :

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none">• Pour tout réel x strictement positif, on a $e^{\ln x} = x$• Pour tout réel x, on a $\ln(e^x) = x$ | <ul style="list-style-type: none">• $\ln 1 = 0$• $\ln e = 1$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Résulte de la définition

Remarque :

La fonction exponentielle transformant une somme en produit, on peut penser que la fonction logarithme népérien qui est sa fonction réciproque, transforme un produit en somme.

2) PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Propriétés :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none">• $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.• $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$• $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ | <ul style="list-style-type: none">• $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$• Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln a$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Preuve :

Les démonstrations se font principalement en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

• $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b$. Or si $e^y = x$, alors $y = \ln x$. On a donc $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$

• $e^{-\ln a} = \frac{1}{e^{\ln a}} = \frac{1}{a}$ donc $-\ln a = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$

• $e^{\ln a - \ln b} = \frac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}} = \frac{a}{b}$ donc $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

• $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2 \ln(\sqrt{a})$ donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

• Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n \ln a} = (e^{\ln a})^n = a^n$ donc $\ln a^n = n \ln a$

3) ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Propriété :

La fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

La croissance de la fonction \ln est lente.
Par exemple : $\ln(10^8) \approx 18,42$

Preuve :

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

Raisonnons par l'absurde :

Supposons que $\ln a \geq \ln b$

La fonction exponentielle étant croissante on aurait $e^{\ln a} \geq e^{\ln b}$ donc $a \geq b$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

On ne peut donc pas avoir $\ln a \geq \ln b$.

On a donc $\ln a < \ln b$

On en déduit que la fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Conséquences :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$
- si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$

Propriété :

La fonction \ln est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Preuve : exigible

Soit $x > 0$ et $a > 0$.

Déterminons $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$

En posant $X = \ln(x)$ et $A = \ln(a)$, on obtient : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim_{X \rightarrow A} \frac{X - A}{e^X - e^A}$

Or on sait que la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$

Donc $\lim_{X \rightarrow A} \frac{e^X - e^A}{X - A} = e^A = e^{\ln(a)} = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim_{X \rightarrow A} \frac{X - A}{e^X - e^A} = \frac{1}{a}$

La fonction \ln est donc dérivable en a , pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que la fonction \ln est dérivable (et donc continue) sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Remarque :

On sait que pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

En supposant la fonction \ln dérivable sur \mathbb{R}_+^* et en utilisant la propriété de dérivation des fonctions composées, on peut écrire pour tout $x > 0$:

$$(e^{\ln x})' = (\ln x)' \times e^{\ln x} \Leftrightarrow (x)' = (\ln x)' \times x \Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\text{et en acceptant les abus de notation pour faciliter})$$

Propriétés :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Preuve :

• Soit $M > 0$.

Pour tout $x > 0$, on a : $\ln x > M \Leftrightarrow x > e^M$

Ainsi, si $x > e^M$ on a $\ln x > M$

Ce résultat est vrai pour tout $M > 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

- Posons $X = \frac{1}{x}$ c'est-à-dire $x = \frac{1}{X}$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives X tend vers $+\infty$.

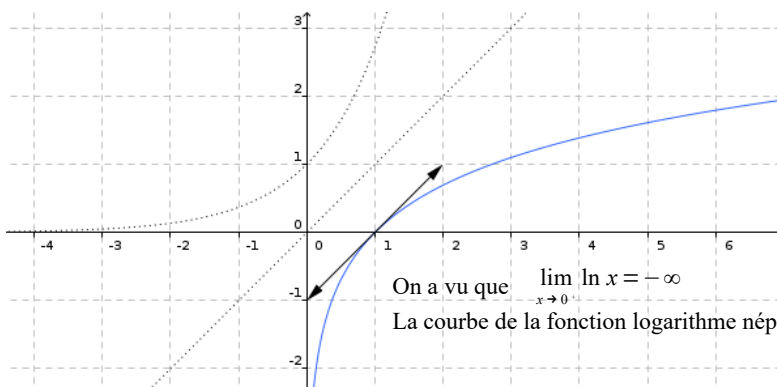
On a $\ln x = \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\ln X$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln X$. On sait que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
\ln	$-\infty$	$+\infty$

Représentation graphique :



Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On a vu que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
 La courbe de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (Oy) .

Propriété : (en plus)

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Preuve :

Par définition du nombre dérivé en 1, on peut écrire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 1} = \frac{1}{1} = 1$ (car $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$)

Propriétés :

<ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ • Pour tout entier naturel non nul n, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ • Pour tout entier naturel non nul n, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Preuve :

- Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Posons $X = \ln x$ on a alors $e^X = x$
 Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$.

On peut écrire $\frac{\ln x}{x} = \frac{X}{e^X}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X}$.

Or on sait que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ et par conséquent $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

OU (sans utiliser la fonction exponentielle)

On peut écrire pour tout $x > 0$: $\ln x < x$ (trivial graphiquement) et donc $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$, c'est à dire $\frac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}$.

Pour $x > 1$, on a alors :

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

• Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

Pour $n > 1$, on peut écrire : $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x}$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$, par produit, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

• Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ *exigible*

Posons $X = \frac{1}{x}$ on a alors $x = \frac{1}{X}$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$.

On peut écrire $x \ln(x) = \frac{1}{X} \times \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{1}{X} \times \ln(X) = -\frac{\ln(X)}{X}$

Or on sait que $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

• Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$

Pour $n > 1$, on peut écrire : $x^n \ln x = x^{n-1} x \ln x$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} = 0$, par produit, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$.

4) DÉRIVÉE DE $x \mapsto \ln(u(x))$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

La fonction $f: x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Preuve :

Immédiat en utilisant, la dérivée de $x \mapsto g(u(x))$