REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES ET ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Dans ce cours, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$

1) REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE DE L'ESPACE

Propriété :

Soit d la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

Un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartient à d si, et seulement si il existe un réel k tel que :

$$\begin{cases}x=x_A+k\,\lambda\\ y=y_A+k\,\beta\\ z=z_A+k\,\gamma\end{cases}$$

Preuve :

Soit $M\,(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace.

M appartient à d si ,et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\\ z-z_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ sont colinéaires, si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM}=k\,\vec{u}$.

Ce qui se traduit par : $\begin{cases}x-x_A=k\,\lambda\\ y-y_A=k\,\beta\\ z-z_A=k\,\gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=x_A+k\,\lambda\\ y=y_A+k\,\beta\\ z=z_A+k\,\gamma\end{cases}$

Remarque :

A chaque réel k correspond un unique point M de la droite.

Réciproquement, à chaque point M de la droite correspond un unique réel k tel que $\overrightarrow{AM}=k\,\vec{u}$.

Définition :

Soit d la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

$\begin{cases}x=x_A+k\,\lambda\\ y=y_A+k\,\beta\\ z=z_A+k\,\gamma\end{cases}$ ($k\in\mathbb{R}$) est **une représentation paramétrique** de la droite d .

Le paramètre k peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre distincte de x, y et z .
On utilise aussi souvent la lettre t.

Remarques :

- Si λ , β et γ sont trois réels non nuls simultanément, le système $\begin{cases}x=a+k\,\lambda\\ y=b+k\,\beta\\ z=c+k\,\gamma\end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite passant par le point de coordonnées $(a\,;b\,;c)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix}\lambda\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

- Il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique d'une droite de l'espace.

- Représentations paramétriques d'un segment et d'une demi-droite :
  Soit A et B deux points distincts de l'espace.
  En considérant le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, l'appartenance d'un point M au segment $[AB]$ ou bien à la demi-droite $[AB)$ s'obtient en adaptant l'énoncé de la conclusion ci-dessus :

  - pour le segment, il suffit de remplacer dans le système : « $k\in\mathbb{R}$ » par « $k\in[0\,;1]$ ».

  - pour la demi-droite $[AB)$, il suffit de remplacer dans le système : « $k\in\mathbb{R}$ » par « $k\in[0\,;+\infty[$ ».

2) ÉQUATIONS DE PLANS

Propriété :

Le plan qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$

Propriété :

- Tout plan admet une équation du type $ax+by+cz+d=0$ où l'un au moins des réels a, b et c est non nul et d est un réel quelconque. De plus, le vecteur non nul $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal à P.
- **Réciproquement :**

Soit a, b, c et d des réels tels que l'un au moins des réels a, b et c n'est pas nul.

L'ensemble des points $M\ (x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

Si a , b et c sont nuls simultanément, deux cas se présentent :

- $d=0$, et alors la relation $ax+by+cz+d=0$ est toujours vérifiée

- $d\neq 0$, et alors la relation $ax+by+cz+d=0$ n'est jamais vérifiée

Preuve : *exigible*

- Soit P un plan, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P et $A\ (x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ un point de P.

Soit $M\ (x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de l'espace.

On a $M\in P\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=0$

En posant $d=-ax_A-by_A-cz_A$, on obtient :

$$M\in P\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$$

- **Réciproquement :**

Soit $a,\ b,\ c$ et d des réels tels que l'un au moins des réels $a,\ b$ et c n'est pas nul.

On considère l'ensemble E des points $M\ (x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ et on note $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

On considère, par exemple, que $a\neq 0$. Le point $A\left(-\dfrac{d}{a}\ ;0\ ;0\right)$ est un point de E .

Pour tout point $M\ (x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace, on a $\overrightarrow{AM}\left(x+\dfrac{d}{a}\ ;y\ ;z\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=ax+by+cz+d$

L'ensemble E est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, c'est à dire la plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Remarques :

- Un plan admet une infinité d'équations.

Si $ax+by+cz+d=0$ est l'équation d'un plan, alors $k\ (ax+by+cz+d)=0$, où $k\in\mathbb{R}^*$, est aussi une équation de ce plan.

Les équations $x-y+z-4=0$ et $\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{4}-1=0$ sont deux équations du même plan.

- Si $d\neq 0$, le plan ne passe pas par l'origine du repère. On peut alors toujours choisir une équation de la forme $a'x+b'y+c'z+1=0$

- Lorsque P est un plan parallèle à l'un des plans de coordonnées, il admet comme vecteur normal l'un des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ ou $\vec{k}$, et on a alors :
  - tout plan parallèle au plan (xOy) admet une équation du type $z=k$
  - tout plan parallèle au plan (yOz) admet une équation du type $x=k$
  - tout plan parallèle au plan (xOz) admet une équation du type $y=k$

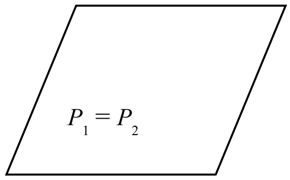
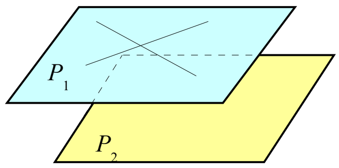
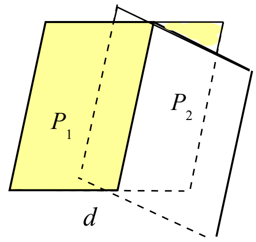
3) POSITIONS RELATIVES, ÉQUATIONS CARTÉSIENNES ET REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES

A) POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS

Soit P_1 et P_2 deux plans d'équations respectives $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ et $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, et de vecteurs normaux respectifs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$.
On peut savoir à priori si les deux plans sont sécants ou parallèles selon que leurs vecteurs normaux sont colinéaires ou non.

En particulier, lorsqu'ils sont sécants, pour trouver les coordonnées de leurs points d'intersection, on résout le système formé par leurs deux équations. Ce système possède alors une infinité de solutions qui sont représentées par les points de la droite d, intersection de P_1 et P_2.

Le tableau ci-dessous résume les différentes positions de P_1 et P_2 et indique l'ensemble des solutions du système $(S) : \begin{cases} a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z+d_1=0 \\ a_2\,x+b_2\,y+c_2\,z+d_2=0 \end{cases}$

P_1 et P_2 sont parallèles		P_1 et P_2 sont sécants
P_1 et P_2 confondus 	 P_1 et P_2 sont strictement parallèles	
$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ colinéaires Les suites (a_1 , b_1 , c_1) et (a_2 , b_2 , c_2) sont proportionnelles		$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ non colinéaires Les suites (a_1 , b_1 , c_1) et (a_2 , b_2 , c_2) ne sont pas proportionnelles
(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets $(x\,;\,y\,;\,z)$ solution de l'une des deux équations	(S) n'admet aucune solution	(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets $(x\,;\,y\,;\,z)$ coordonnées des points de d

Remarques :

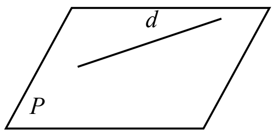
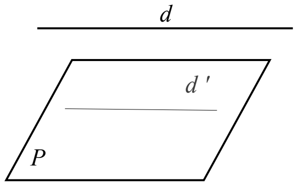
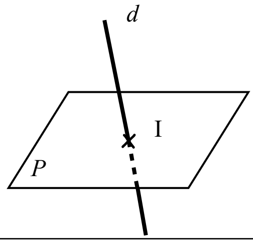
- On dit que (S) est un système d'équations cartésiennes de la droite d.
- La démarche géométrique permet de prévoir à priori le nombre de solutions.

B) POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Soit P le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et d la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et passant par le point A de coordonnées $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$.
On peut savoir à priori si d est sécante ou parallèle à P suivant que $\vec{n}$ est orthogonal ou non à $\vec{u}$.

En particulier, si d coupe P, leur point d'intersection I a pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ solution du système $(S) : \begin{cases} x=x_A+t\,\lambda \\ y=y_A+t\,\beta \\ z=z_A+t\,\gamma \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}$

Le tableau ci-dessous résume les différentes positions de d et P et indique l'ensemble des solutions du système (S) .

d et P sont parallèles		d et P sont sécants
 d est contenue dans P	 d est strictement parallèle à P	
$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux		$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux
(S) admet une infinité de solutions : tous les triplets $(x\,;\,y\,;\,z)$ coordonnées des points de d	(S) n'admet aucune solution	(S) a une unique solution : $(x_I\,;\,y_I\,;\,z_I)$ coordonnées de I

Remarque :
Si d est définie comme l'intersection de deux plans P_1 et P_2, la recherche de l'intersection de d et P peut se ramener à celle des trois plans P_1 , P_2 et P

4) PROJETÉ ORTHOGONAL : APPLICATIONS

A) COORDONNÉES DU PROJETÉ ORTHOGONAL D'UN POINT SUR UN PLAN

Exemple 1: Dans un repère orthonormal, on considère le point $M(0;-1;4)$ et le plan P d'équation $2x-y+3z-1=0$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthonormal M' du point M sur le point P.

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan P, et donc un vecteur directeur de la droite (MM').

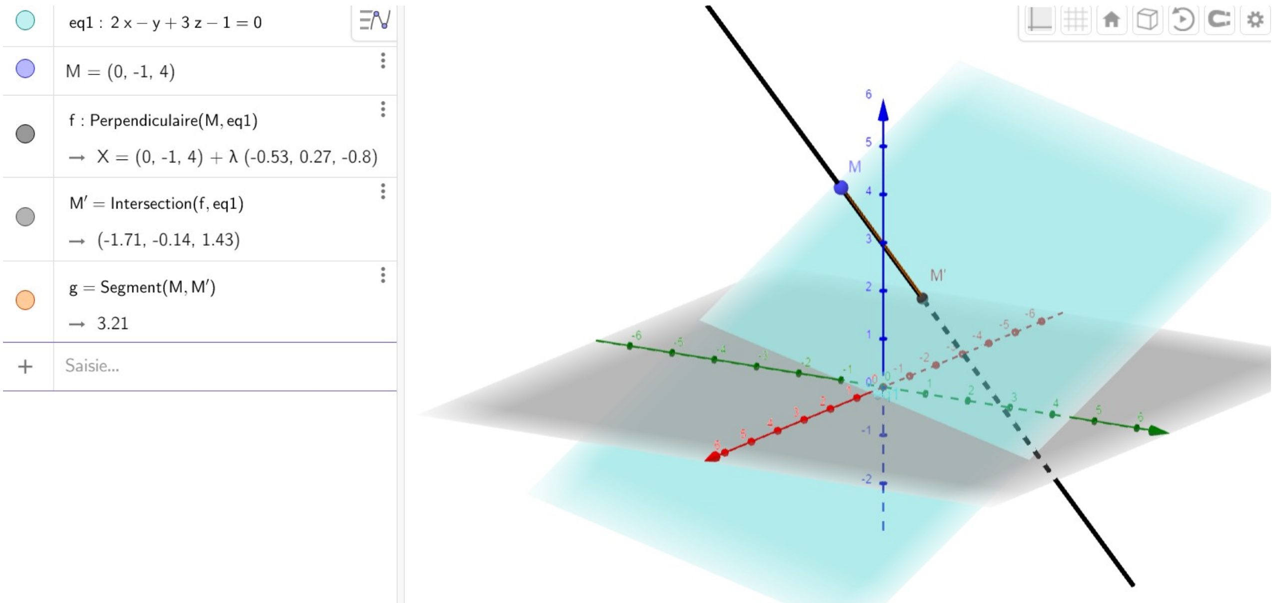
On en déduit une équation paramétrique de la droite (MM') : $\begin{cases}x=2t\\y=-1-t\\z=4+3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

M' est défini comme étant l'intersection de la droite (MM') et du plan P . On a alors :

$$2\times2t-(-1-t)+3\times(4+3t)-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4t+1+t+12+9t-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 14t=-12 \quad\Leftrightarrow\quad t=-\frac{6}{7}$$

M' a donc pour coordonnées $\left(-\frac{12}{7};-\frac{1}{7};\frac{10}{7}\right)$

Ci-dessous : une vue du problème réalisée avec GeoGebra.



B) COORDONNÉES DU PROJETÉ ORTHOGONAL D'UN POINT SUR UNE DROITE

Exemple 2 : Dans un repère orthonormal, on considère le point $M(0;-1;4)$ et la droite d passant par $A(-1;2;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

Déterminer les coordonnées du projeté orthonormal M' du point M sur la droite d .

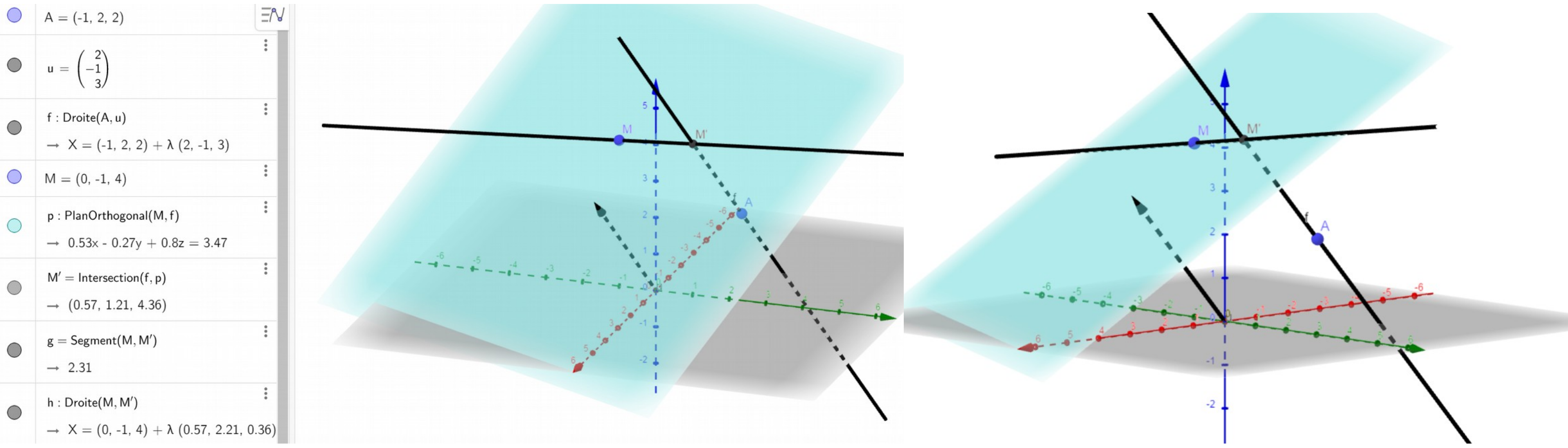
Une équation paramétrique de la droite droite d est $\begin{cases}x=-1+2t\\y=2-t\\z=2+3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

On cherche le point $M'(-1+2t;2-t;2+3t)$ de d tel que $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}-1+2t\\3-t\\-2+3t\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ soient orthogonaux, c'est à dire :

$$\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{u}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\times(-1+2t)-1\times(3-t)+3\times(-2+3t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad -2+4t-3+t-6+9t=0 \quad\Leftrightarrow\quad 14t=11 \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{11}{14}$$

M' a donc pour coordonnées $\left(\frac{4}{7};\frac{17}{14};\frac{61}{14}\right)$

Ci-dessous : deux vues du problème réalisées avec GeoGebra.

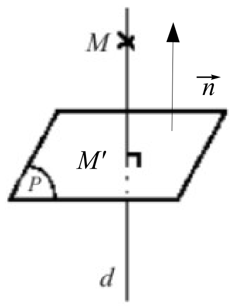


C) FORMULE POUR CALCULER LA DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}; \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace et P le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$.

$\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

On calcule $\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{n}$ de deux façons différentes :



Façon 1: (avec les coordonnées)

On a $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}x_{M'}-x_M\\y_{M'}-y_M\\z_{M'}-z_M\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, d'où :

$\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{n} = a(x_{M'}-x_M)+b(y_{M'}-y_M)+c(z_{M'}-z_M) = -a\,x_M-b\,y_M-c\,z_M + a\,x_{M'}+b\,y_{M'}+c\,z_{M'}$

Or $M' \in P$, donc $a\,x_{M'}+b\,y_{M'}+c\,z_{M'}+d=0 \Leftrightarrow a\,x_{M'}+b\,y_{M'}+c\,z_{M'}=-d$

Ainsi $\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{n} = -a\,x_M-b\,y_M-c\,z_M - d$

Façon 2: (avec les projetés orthogonaux)

On a (par construction), $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{n}$ colinéaires .... (car ils sont tous les deux orthogonaux à P) . On a alors :

$\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{n} = \|\overrightarrow{MM'}\| \times \|\vec{n}\|$ ou $\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{n} = -\|\overrightarrow{MM'}\| \times \|\vec{n}\|$ selon que $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{n}$ sont de sens opposés on non.

On obtient donc :

$|\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{n}| = \|\overrightarrow{MM'}\| \times \|\vec{n}\|$

Et $\|\overrightarrow{MM'}\| = \dfrac{|\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|-a\,x_M-b\,y_M-c\,z_M-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|a\,x_M+b\,y_M+c\,z_M-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

On en déduit donc que la distance du point M au plan P est $\dfrac{|a\,x_M+b\,y_M+c\,z_M-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Revenons à l'exemple 2 :

En appliquant cette formule, on obtient que la distance de M au plan P est : $\dfrac{|2\times0-(-1)+3\times4-1|}{\sqrt{4+1+9}} = \dfrac{12}{\sqrt{14}} \approx 3{,}21$

Ce résultat correspond bien au résultat fourni par GeoGebra.

On peut aussi calculer la longueur MM', on obtiendra le même résultat.