Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Ex 9-1 : ***Vrai ou faux ?***

Soit la droite $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=-3t\\z=2-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

1) d passe par $A(-1;0;2)$

2) d a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

3) d passe par $B(1;-3;-1)$

4) d a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$

5) d est parallèle à $d':\begin{cases}x=3-2k\\y=1+3k\\z=k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$

6) d coupe l'axe des ordonnées.

7) d coupe l'axe des cotes au point $C(3;-6;0)$.

Ex 9-2 : ***Éléments caractéristiques***

Donner les éléments caractéristiques des droites suivantes :

1) $d:\begin{cases}x=2t\\y=2-3t\\z=2-6t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

2) $d':\begin{cases}x=3t-4\\y=1-3t\\z=-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Ex 9-3 : ***Droite, segment, demi-droite***

Soit $A(2;1;4)$, $B(1;0;-2)$, $C(-2;0;0)$ et $D(0;5;6)$

Donner des représentations paramétriques de la droite (AB), du segment [CD] et de la demi-droite [BC).

Ex 9-4 : ***Appartient ou pas ?***

Soit $d:\begin{cases}x=2+t\\y=-1+2t\\z=-3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Dire si les points suivants appartiennent ou pas à la droite d :

$A(2;-1;-3)$

$B(0;-3;6)$

$C(1;-3;3)$

$D(3;1;-3)$

Ex 9-5 : ***Droites sécantes ?***

Soit $d:\begin{cases}x=3+t\\y=2-t\\z=2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=1-2s\\y=-s\\z=-1+s\end{cases}$, $s\in\mathbb{R}$

1) Montrer que d et d' ne sont pas parallèles.

2) Donner deux points A et B de la droite d .

3) Donner deux points C et D de la droite d' .

4) Montrer que A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

5) Que peut-on en déduire pour ces deux droites ?

<u>Ex 9-6 :</u> ***Avec le centre de gravité***

On considère les points $A(1;2;3)$, $B(-1;0;1)$ et $C(2;1;-1)$.
1) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle OBC.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (AG).

3) Quelle est la valeur du paramètre correspondant à chacun des points suivants :

A ?

le milieu M de [AG] ?

le symétrique S de M par rapport à A ?

<u>Ex 9-7 :</u> ***Avec le milieu d'un segment***

1) Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par le point $A(6;1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

2) Donner une représentation paramétrique de la droite d' passant par le point $B(3;-3;-6)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

3) Montrer qu'il existe $C\in d$ et $D\in d'$ tels que le milieu de [CD] soit le point $I(1;-2;3)$.

Ex 9-8 : ***Droites confondues***

Soit $d:\begin{cases}x=-1-5t\\y=-3+t\\z=4t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=9+10t\\y=-5-2t\\z=-8-8t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Montrer que les droites d et d' sont confondues.

Ex 9-9 : ***Droites parallèles***

Soit $d:\begin{cases}x=-1-3t\\y=-3+t\\z=2-2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=1-9t\\y=-1+3t\\z=3-6t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Montrer que les droites d et d' sont strictement parallèles.

Ex 9-10 : ***Droites sécantes***

Soit $d:\begin{cases}x=-1+2t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=3+4t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Montrer que les droites d et d' sont sécantes.

Ex 9-11 : ***Droites non coplanaires***

Soit $d:\begin{cases}x=-3+t\\y=t\\z=1+3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=-t\\y=2t\\z=8-3t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Montrer que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

Ex 9-12 : ***Droites concourantes***

On considère les droites : $d_1 : \begin{cases} x=-t \\ y=3+t \\ z=1+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $d_2 : \begin{cases} x=3+2t \\ y=-2t \\ z=-5-4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

et $d_3 : \begin{cases} x=-2+4t \\ y=1+4t \\ z=1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1) Montrer que ces trois droites sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

2) Ces droites sont-elles coplanaires ?

Ex 9-13 : ***Minimum d'une fonction pour déterminer le projeté orthogonal***

Soit $d : \begin{cases} x=2+t \\ y=-3-4t \\ z=1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $d' : \begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=4+3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1) Montrer que d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

2) Montrer que $\mathrm{B}(-1;2;3)$ n'appartient pas au plan défini par les droites d et d' .

3) À tout point M de paramètre t de d , on associe la fonction f définie par $f(t)=\mathrm{BM}^2$.

Calculer $f(t)$ et déterminer la valeur t_0 pour laquelle $f(t)$ est minimale.

Que représente le point H de paramètre t_0 de d ?

Ex 9-14 : ***Droites orthogonales mais pas perpendiculaires***

Soit $\mathrm{A}(-1;0;2)$, $\mathrm{B}(1;1;3)$, $\mathrm{C}(-2;1;4)$ et $\mathrm{D}(0;1;0)$.

1) Donner une représentation paramétrique de (AB), puis de (CD).

2) Montrer que ces deux droites sont orthogonales, mais pas perpendiculaires.

Ex 9-15 : ***Droites perpendiculaires et donc orthogonales***

Soit $A(-1;1;3)$, $B(2;-1;-2)$, $C(0;1;-4)$ et $D(2;-1;-2)$.
1) Donner une représentation paramétrique de (AB), puis de (CD).

2) Montrer que ces deux droites sont perpendiculaires et déterminer leur point d'intersection.

Équations de plans

Ex 9-16 : ***Vrai ou faux***

Soit le plan $P: x-2y+z-2=0$.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal

4) P passe par $A(0;0;2)$

Ex 9-17 : ***Équation cartésienne d'un plan : point et vecteur normal***

Dans chacun des cas, déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1) $A(2;-1;3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

2) $A(1;5;0)$ et $\vec{n}=\vec{i}-2\vec{j}$

Ex 9-18 : ***Équation cartésienne d'un plan : trois points***

Soit les points $A(1;5;0)$, $B(2;0;-1)$ et $C(0;3;4)$.

1) Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

2) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

Ex 9-19 : ***Projeté orthogonal***

Soit le plan $P: -5x+y-z-6=0$ et le point $A(-6;2;-1)$.
Démontrer que $B(-1;1;0)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan P.

Position relative de deux plans

Ex 9-20 : ***Plans perpendiculaires***

Dans chacun des cas, après avoir déterminé des vecteurs normaux aux plans P et Q, déterminer leur position relative :

1) $P: -x-y+2z-5=0$ et $Q: 2x+4y-3z=0$

2) $P: x-2y+z-4=0$ et $Q: -3x+y-4z-2=0$

3) $P: x-2y+3=0$ et $Q: 2x+y-3z-5=0$

4) $P: x=-1$ et $Q: z=2$

Ex 9-21 : ***Intersection de deux plans***

Dans chacun des cas, démontrer que les plans P et Q sont sécants, déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection puis donner un vecteur directeur de cette droite.

1) $P: 2x-3y+z-4=0$ et $Q: x+2y-z+1=0$

2) $P: x-3y+2z-5=0$ et $Q: 2x+y+7z-1=0$

Ex 9-22 : ***Plans parallèles***

Soit les plans $P: -2x+4y-3z+2=0$ et $Q: x-2y+\frac{3}{2}z-5=0$.

1) Montrer que les plans P et Q sont parallèles.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan R parallèle au plan P et passant par le point $A(-2;0;3)$

Position relative d'une droite et d'un plan

Ex 9-23 : ***Vrai ou faux***

Soit la droite $d: \begin{cases} x=1-2t \\ y=-2+t \\ z=3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan $P: 2x-y-3z+10=0$

1) d et P sont parallèles

2) d et P sont perpendiculaires.

3) Leur point d'intersection a pour paramètre $t=0$ sur la droite.

4) Leur point d'intersection a pour coordonnées $(-1;-1;3)$

Ex 9-24 : ***Intersection d'une droite et d'un plan***

Dans chacun des cas, déterminer les coordonnées du point d'intersection, quand il existe, de la droite d et du plan P :

1) $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $P: 5x-y+2z=0$

2) $d: \begin{cases} x=1-2k \\ y=1+k \\ z=3k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ et $P: x-y+z+1=0$

3) $d:\begin{cases} x=1+s \\ y=2+s \\ z=s \end{cases}$, $s\in\mathbb{R}$ et $P: x+y-2z-3=0$

4) $d:\begin{cases} x=1-s \\ y=2+s \\ z=3s+9 \end{cases}$, $s\in\mathbb{R}$ et $P: z=0$

Ex 9-25 : ***Étudier la position relative d'une droite et d'un plan***

Soit les points $A(0;-1;-1)$ et $B(1;0;0)$.

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Étudier la position relative de cette droite avec chacun des plans $P: -3x+y+2z+3=0$, $Q: 2x-3y+z-3=0$ et $R: -x+2y-3z+3=0$

Intersection de deux droites

Ex 9-26 : ***Droites sécantes***

Soit les droites $d:\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases} x=4-5t \\ y=3-2t \\ z=-1+2t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

1) Démontrer que les droites d et d' sont sécantes.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant ces deux droites.

Ex 9-27 : ***Droites parallèles***

Soit les droites $d:\begin{cases}x=-2-4t\\y=3+2t\\z=1-2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=1+2t\\y=5-t\\z=-1+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

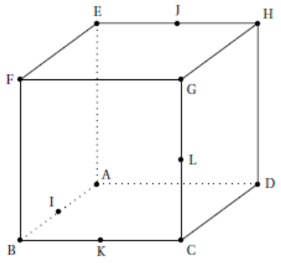
1) Démontrer que les droites d et d' sont strictement parallèles.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan contenant ces deux droites.

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 9-28 : ***Baccalauréat S – Liban 27 mai 2015 – Ex 9-1***

Repère – équations de droites et de plans – intersection d'une droite et d'un plan – produit scalaire – volume – droites sécantes



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?*

Ex 9-29 : *Baccalauréat S – Polynésie 12 juin 2015 – Ex 9-1*

Repère – équations de droites et de plans – intersection d'une droite et d'un plan – section

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.

I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$.

1. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie**). On ne demande pas de justification.*

Ex 9-30 : *Baccalauréat S – Métropole 22 juin 2015 – Ex 9-2*

Repère – équations de droites et de plans – droites non coplanaires – distance minimale

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5), B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t ; -1 ; 5)$ et $N_t(11 ; 0,8t ; 1 + 0,6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

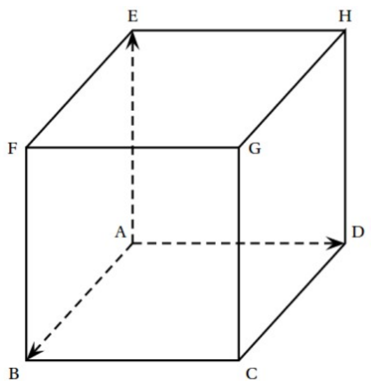
1. **a.** La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
   b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK).
   Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.
   c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathscr{P}$, coupe ce plan au point E(11 ; −1 ; 5).
   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. **a.** Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.
   b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?*

Ex 9-31 : ***Baccalauréat S – Pondichéry 27 avril 2017 – Ex 9-5***

Équations de plans – section

On considère un cube ABCDEFGH fourni en annexe.
L'espace est rapporté au repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1=0$.
Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.
La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.

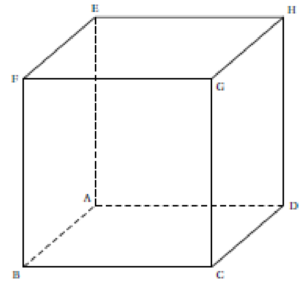


Ex 9-32 : ***Baccalauréat S – Centres étrangers 13 juin 2012 – Ex 9-1 (en partie)***

Repère – équations paramétriques – intersection de droites – parallélogramme – milieu

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$.

On considère les points $I\left(1 ; \frac{1}{3} ; 0\right)$, $J\left(0 ; \frac{2}{3} ; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4} ; 0 ; 1\right)$ et $L(a ; 1 ; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{4}+t'\left(a-\frac{3}{4}\right) \\ y & = & t' \\ z & = & 1-t' \end{array}\right. , t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a=\frac{1}{4}$.

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a=\frac{1}{4}$.
Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; 1 ; 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

Ex 9-33 : ***Baccalauréat S – Amérique du nord 30 mai 2014 – Ex 9-3 (en partie)***

Repère – équations paramétriques – intersection de droites – section

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe 2 (à rendre avec la copie).
On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que
$\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L

2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.