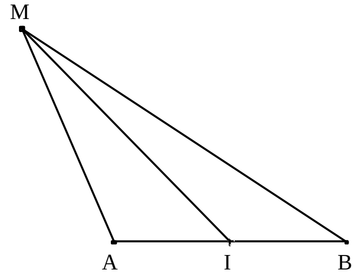
LIGNES DE NIVEAU : comment faire …

Il est préférable d'être capable de retrouver les résultats ci - dessous …

1) TRANSFORMATION D'ECRITURE … : Théorème de la médiane

Soit A et B deux point du plan et I le milieu de [AB].
Pour tout point M du plan, on a :

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$
- $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$
- $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$



Preuve :

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$

  Or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -IA \cdot IB = -\dfrac{AB^2}{4}$

  Ainsi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$
- On a $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = IA^2 + MI^2 + 2\,\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI}$
  De même $MB^2 = IB^2 + MI^2 + 2\,\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{MI}$

  Ainsi $MA^2 + MB^2 = IA^2 + IB^2 + 2\,MI^2 + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{MI}$
  Or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $IA = IB = \dfrac{AB}{2}$

  On a donc $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

  D'autre part $MA^2 - MB^2 = 2(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{IM} = 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

2) LIGNES DE NIVEAU

A) DEFINITION

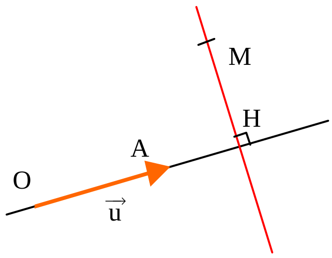
Soit f une application qui, à tout point M du plan, associe un réel f (M) .
On appelle **ligne de niveau k de l'application f** , l'ensemble des points M du plan tels que f (M) = k .

B) LIGNES DE NIVEAU DE $f : M \longmapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et O un point du plan . A chaque point M du plan , on associe le réel $f(M) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$
Déterminez D_k la ligne de niveau k de f, où k est un réel donné .

Méthode :

- On pose $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, puis on construit la droite (OA) , orientée de O vers A .
- Soit M un point du plan et H le projeté orthogonal de M sur (OA) .
  On a alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$
  Ainsi $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = k$



On place le point H grâce à l'égalité $OH = \dfrac{|k|}{OA}$ et grâce au signe de k …

- On en déduit que D_k est l'ensemble des points M du plan de projeté orthogonal H sur (AB) c'est à dire la droite perpendiculaire à (AB) passant par H .

C) LIGNES DE NIVEAU DE $f : M \longmapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

A et B sont deux points distincts du plan . A chaque point M du plan , on associe le réel $f(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.
Déterminez C_k *la ligne de niveau* k *de* f, *où* k *est un réel donné .*

Soit I le milieu de [AB] . On a vu que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$

Ainsi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = k \Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{AB^2}{4} + k$

trois cas se présentent :

- Si $\dfrac{AB^2}{4} + k > 0$, alors C_k est le cercle de centre I est de rayon $\sqrt{\dfrac{AB^2}{4} + k}$
- Si $\dfrac{AB^2}{4} + k = 0$, alors C_k est le point I .
- Si $\dfrac{AB^2}{4} + k < 0$, alors C_k est l'ensemble vide .

D) LIGNES DE NIVEAU DE $f : M \longmapsto MA^2 + MB^2$

A et B sont deux points distincts du plan . A chaque point M du plan , on associe le réel $f(M) = MA^2 + MB^2$.
Déterminez C_k *la ligne de niveau* k *de* f, *où* k *est un réel donné .*

Soit I le milieu de [AB] . On a vu que pour tout point M du plan : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Ainsi $MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{1}{2}\left(k - \dfrac{AB^2}{2}\right)$

trois cas se présentent :

- Si $\dfrac{1}{2}\left(k - \dfrac{AB^2}{2}\right) > 0$, alors C_k est le cercle de centre I est de rayon $\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(k - \dfrac{AB^2}{2}\right)}$
- Si $\dfrac{1}{2}\left(k - \dfrac{AB^2}{2}\right) = 0$, alors C_k est le point I .
- Si $\dfrac{1}{2}\left(k - \dfrac{AB^2}{2}\right) < 0$, alors C_k est l'ensemble vide .

E) LIGNES DE NIVEAU DE $f : M \longmapsto MA^2 - MB^2$

A et B sont deux points distincts du plan . A chaque point M du plan , on associe le réel $f(M) = MA^2 - MB^2$.
Déterminez D_k *la ligne de niveau* k *de* f, *où* k *est un réel donné .*

Soit I le milieu de [AB] . On a vu que pour tout point M du plan : $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

Ainsi $MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{k}{2}$

On retrouve la situation vue en B) …

Les lignes de niveau de f sont donc des droites perpendiculaires à (AB) …