# Calcul vectoriel

## 1 Coordonnées d'un vecteur

### 1.1 Définition

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées de l'unique point $M$ tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

On écrit $\vec{u}\ (x; y)$ pour dire que les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $(x; y)$.

Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées de l'unique point $M$ tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

On écrit $\vec{u}\ (x; y; z)$ pour dire que les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $(x; y; z)$.

A partir d'ici, on se place dans l'espace. Tout peut être ramené au plan si l'on supprime la troisième coordonnées ou si on la remplace par 0.

### 1.2 Interprétation

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ nous donne la position du point $M$. Si $x$, $y$, $z$ sont des fonctions de la variable $t$ représentant le temps, le vecteur $\overrightarrow{OM}\ (t)$ nous donne la position du point $M$ à l'instant $t$. Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les équations paramétriques de la courbe représentant le déplacement du point $M$ au cours du temps. Dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{OM'}\ (t)$, de coordonnées $(x'(t); y'(t); z'(t))$ est le vecteur vitesse et le vecteur $\overrightarrow{OM''}\ (t)$, de coordonnées $(x''(t); y''(t); z''(t))$ est le vecteur accélération.

### 1.3 Propriété

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans le repère choisi.

### 1.4 Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Si les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ sont donnés ;

alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

## 2 Addition de vecteurs

### 2.1 Coordonnées

Dans un repère, on donne les vecteurs $\vec{u}\ (x; y; z)$ et $\vec{v}\ (x'; y'; z')$ ; alors le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$.

### 2.2 Propriétés

Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs alors :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

### 2.3 Soustraction

#### 2.3.1 Définition

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs alors :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

où $-\vec{v}$ est l'opposé de $\vec{v}$

#### 2.3.2 Méthode

Chaque fois que l'on rencontre une soustraction, on la remplace par l'addition corrrepondante.
Exemple : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

## 3 Multiplication d'un vecteur par un réel

### 3.1 Produit d'un vecteur par un nombre réel

#### 3.1.1 Définition

$\lambda$ est un réel et $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(a; b; c)$ dans un repère.
Le vecteur $\lambda\ \vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda a; \lambda b; \lambda c)$ dans le même repère.

$\lambda\ \vec{u}$ est indépendant du repère choisi.

#### 3.1.2 Propriétés

Si $A$ et $B$ sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, et $C$ tel que $\lambda\ \vec{u} = \overrightarrow{AC}$ alors $A, B, C$ sont alignés.

- si $\lambda = 0$ alors $C = A$,
- si $\lambda = 1$ alors $C = B$,
- si $0 \leq \lambda \leq 1$ alors $C \in [AB]$
- si $\lambda > 0$ alors $AC = \lambda AB$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même sens,
- si $\lambda < 0$ alors $AC = -\lambda AB$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de sens contraire.

#### 3.1.3 Calculs

$$\lambda\ \vec{u} = \vec{0} \iff \lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = 0$$

$$(-1)\ \vec{u} = -\vec{u}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

$$\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\ \vec{u} + \lambda\ \vec{v}$$

$$(\lambda + \lambda')\ \vec{u} = \lambda\ \vec{u} + \lambda'\ \vec{u}$$

$$(\lambda\lambda')\ \vec{u} = \lambda(\lambda'\ \vec{u})$$

### 3.2 Vecteurs colinéaires

#### 3.2.1 Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires s'il existe un réel $\lambda$ tel que $\vec{v} = \lambda\ \vec{u}$.
Leurs coordonnées sont donc proportionnelles.
Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

#### 3.2.2 Propriétés

$$ABC \text{ alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}$$

$$\text{les doites } (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont parallèles} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires}$$

$$I \text{ est le milieu de } [AB] \iff \overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{AI}$$

## 4 Barycentre

### 4.1 Définition

Soient $A$ et $B$ deux points quelconques, $a$ et $b$ deux réels tels que $a + b \neq 0$. Le barycentre des points $A$ et $B$ affectés respectivement des coefficients $a$ et $b$ est l'unique point $G$ tel que :

$$a\ \overrightarrow{GA} + b\ \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

On note $G$ barycentre de $(A, a)$ et $(B, b)$. On peut alors écrire : $(A, a)(B, b) = (G, a + b)$.

### 4.2 Propriétés

- Le point $G$ vérifie : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\ \overrightarrow{AB}$
- Quel que soit le point $M$ : $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{a+b}\left(a\ \overrightarrow{MA} + b\ \overrightarrow{MB}\right)$
- Les coordonnées de $G$ sont données par : $x_G = \dfrac{ax_a + bx_b}{a+b}$ et $y_G = \dfrac{ay_a + by_b}{a+b}$
- Si $a = b$, $G$ est le milieu de $[AB]$.
- Si $G$ est le barycentre de $(A, a)$ et $(B, b)$ alors $G$ est le barycentre de $(A, ka)$ et $(B, kb)$ pour $k \neq 0$.

### 4.3 Généralisation

On peut étendre la définition et les propriétés à $n$ points du plan ou de l'espace :
$G$ est le barycentre de $(A_1, a_1)$, $(A_2, a_2)$, …, $(A_n, a_n)$, avec $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, si

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\ \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Par exemple pour trois points distincts $A$, $B$ et $C$, le barycentre $G$ de $(A, a)$, $(B, b)$ et $(C, c)$ avec $a+b+c \neq 0$ est défini par :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a+b+c}\left(a\ \overrightarrow{MA} + b\ \overrightarrow{MB} + c\ \overrightarrow{MC}\right)$$

On peut alors écrire $(G, a + b + c) = (A, a)(B, b)(C, c)$

Et si $G$ est le barycentre de $(A, a)$, $(B, b)$ et $(C, c)$ alors $G$ est le barycentre de $(A, a)$ et $(H, b + c)$ où $H$ est le barycentre de $(B, b)$ et $(C, c)$

### 4.4 Application

Le centre de gravité ou centre d'inertie d'un système de points matériels est le barycentre de ces points affectés de leurs masses respectives.

## 5 Produit scalaire

### 5.1 Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace.
Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, on pose $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. On lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".
Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, on pose $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$ ;
alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OH}=OM\times ON\cos\theta=||\vec{u}||\times||\vec{v}||\cos\theta$
où $H$ est le projeté orthogonal de $N$ sur la droite orientée $(OM)$ et $\theta$ est l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.
En repère orthonormé, si $(x:y:z)$ et $(x';y';z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz' \quad \text{et} \quad ||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

### 5.2 Propriétés

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$
$$(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux}$$
$$\text{On note : } \quad \vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=||\vec{u}||$$

### 5.3 Applications

– Si $\alpha$ est l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ alors :

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\times||\vec{v}||}$$

– Soit $M$ un point soumis à une force $\vec{F}$, qui se déplace de $A$ à $B$ en suivant un mouvement rectiligne. Alors le travail $W$ de la force $\vec{F}$ entre $A$ et $B$ est :

$$W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

## 6 Produit vectoriel

### 6.1 Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on pose $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$. On lit "$\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$".
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$, le vecteur $\vec{w}$ étant défini par les conditions suivantes :
$\vec{w}$ est orthogonal au plan $(\vec{u},\vec{v})$,
$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base directe,
$||\vec{w}||=||\vec{u}||\times||\vec{v}||\times|\sin(\vec{u},\vec{v})|$.
$||\vec{w}||$ est aussi l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

## 6.2 Propriétés

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$
$$(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$$
$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

Dans une base orthonormée directe, si $(x : y : z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

## 6.3 Application

- Si $\alpha$ est l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ alors :
$$\sin\alpha = \frac{|| \vec{u} \wedge \vec{v} ||}{|| \vec{u} || \times || \vec{v} ||}$$
- L'aire d'un triangle $ABC$ est : $\frac{1}{2} AB \times AC \sin\widehat{A}$.
  La norme du produit vectoriel est $|| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} || = || \overrightarrow{AB} || \times || \overrightarrow{AC} || \times |\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = AB \times AC \sin\widehat{A}$.
  Par conséquent, l'aire du triangle $ABC$ est donnée par : $\frac{1}{2} || \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} ||$.

  **Exercice :** soit $A(1; 5; 3)$, $B(-1; 0; 4)$ et $C(2; -3; 5)$. Calculer l'aire du triangle $ABC$.
  La réponse est : $\frac{\sqrt{470}}{2}$ .
- Le moment par rapport au point $O$ d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point $M$ est :
$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$