# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

## 1 ) DÉFINITION

**Définition :**

Soit $a$ , $b$ et $c$ trois fonctions définies sur un intervalle $\mathrm{I}$ de $\mathbb{R}$ et $y$ la fonction inconnue, définie et dérivable sur l'intervalle $\mathrm{I}$ . On suppose de plus que la fonction $a$ ne s'annule pas sur l'intervalle $\mathrm{I}$ .

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation du type :

Une fonction $f$ est solution de cette équation sur un intervalle $\mathrm{I}$ si

Les courbes représentatives des fonctions solutions s'appellent courbes intégrales.

**Exemple :** Par exemple, les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \longmapsto 3\mathrm{e}^x$ sont solutions de l'équation différentielle

## 2 ) ÉQUATIONS À COEFFICIENTS CONSTANTS

Il s'agit d'équations pour lesquelles les fonctions $a$ et $b$ sont constantes. Quitte à diviser par $a$ et à renommer les coefficients, on peut se ramener à une équation du type :

$$y'+ay=c(x)$$

Pour simplifier, les fonctions considérées seront toujours définies sur $\mathbb{R}$ . On ne le répétera donc pas à chaque fois.

### A ) ÉQUATION HOMOGÈNE (OU ÉQUATION SANS SECOND MEMBRE)

On appelle ainsi l'équation $y'+ay=0$ .

**Propriété :** *Équation linéaire du premier ordre homogène*

Soit un réel $a$ .
Les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=0$ sont de la forme

**Exemple :** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=0$.

**Remarque :**

L'équation différentielle $y'+5y=0$ peut aussi se noter $f'(x)+5f(x)=0$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+5y(x)=0$.
Cette dernière notation est très utilisée dans les différents domaines des sciences physiques.

### B ) ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE

Considérons l'équation différentielle $(\mathrm{E})$: $y'+ay=c(x)$ .
Soit $y_p$ une solution particulière de cette équation. On remarque alors que :

- si $y_0$ est solution de l'équation homogène associée $(\mathrm{E}_0)$: $y'+ay=0$ , alors $y_0+y_p$ est solution de l'équation complète. En effet :

$y'_0+ay_0=0$ et $y'_p+ay_p=c(x)$ implique $(y_0+y_p)'+a(y_0+y_p)=c(x)$

- Inversement, si $y$ est une autre solution de l'équation complète $(\mathrm{E})$ , alors $y-y_p$ est solution de l'équation homogène $(\mathrm{E}_0)$ . En effet :

$y'+ay=c(x)$ et $y'_p+ay_p=c(x)$ implique $(y-y_p)'+a(y-y_p)=0$

La conséquence de cette remarque est la suivante :

**Propriété :**

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète $(E)$, il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée $(E_0)$, et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

**Remarque :**

On remarque que, si $y_1$ est solution particulière avec second membre $b_1$ et si $y_2$ est solution particulière avec second membre $b_2$, alors $y_1+y_2$ est solution particulière avec second membre $b_1+b_2$ :

C'est ce qu'on appelle **le principe de superposition**.

**Exemples :**

- Résoudre l'équation différentielle $(E)$: $y'+y=e^{2x}$

  Les solutions de l'équation homogène $(E_0): y'+y=0$ sont de la forme
  Recherchons une solution particulière de $(E)$ de la forme $ae^{2x}$

  Les solutions générales de l'équation différentielle $(E)$ sont de la forme

- Résoudre l'équation différentielle $(E)$: $y'+y=e^{-x}$

  Les solutions de l'équation homogène $(E_0): y'+y=0$ sont de la forme

  Recherchons une solution particulière de $(E)$ de la forme $axe^{-x}$

  Les solutions générales de l'équation différentielle $(E)$ sont de la forme

- Résoudre l'équation différentielle $(E)$: $y'+2y=x^2e^{-2x}+2e^{3x}+1+x$

  Les solutions de l'équation homogène $(E_0): y'+2y=0$ sont de la forme

  Par linéarité (principe de juxtaposition), il suffit de chercher des solutions particulières pour chaque terme du second membre, et de les ajouter.

  - Équation différentielle $(E_1)$: $y'+2y=x^2e^{-2x}$

  Cherchons une solution particulière de $(E_1)$ sous la forme $(ax^3+bx^2+cx)e^{-2x}$.
  *(Il est inutile de prendre un terme constant, car on obtient alors une solution de l'équation homogène, qui n'a aucune contribution au terme du second membre)*

  On obtient :

- Équation différentielle $(E_2)$ : $y'+2y=2e^{3x}$

Cherchons une solution particulière de $(E_2)$ sous la forme $ae^{3x}$ . On obtient :

- Équation différentielle $(E_3)$ : $y'+2y=1+x$ .

Cherchons une solution particulière de $(E_3)$ sous la forme $ax+b$ . On obtient :

En appliquant le principe de juxtaposition, on en déduit que les solutions générales de l'équation différentielle $(E)$ : $y'+2y=x^2e^{-2x}+2e^{3x}+1+x$ sont de la forme

## 3 ) UNICITÉ DE LA SOLUTION VÉRIFIANT UNE CONFITION INITIALE DONNÉE

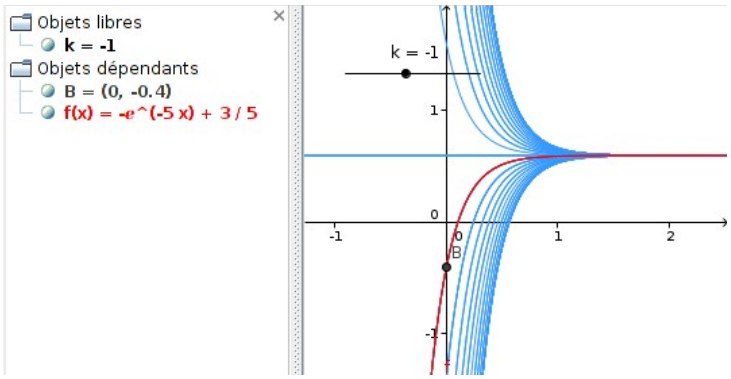
**Exemple :** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=3$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=3$ sont les fonctions de la forme $y(x)=ke^{-5x}+\frac{3}{5}$ où $k\in\mathbb{R}$

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de $k$ .

$k=10$, $k=9$ , …

L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de $k$



On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0)=-0{,}4$.

**Propriété :** *Solution vérifiant une condition initiale donnée*

Pour tout couple de réel $(x_0\,;\,y_0)$, l'équation $y'+ay=c(x)$ (où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que

**Exemple :** Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'+5\,y=3$ telle que $f(0)=1$.