ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

1) DÉFINITION

Définition :

Soit a , b , c et d quatre fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et y la fonction inconnue, définie et dérivable sur l'intervalle I . On suppose de plus que la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I .

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation du type :

Une fonction f est solution de cette équation sur un intervalle I si

2) ÉQUATIONS À COEFFICIENTS CONSTANTS

Il s'agit d'équations pour lesquelles les fonctions a , b et c sont constantes. On a donc une équation du type :

$$ay''+by'+cy=d(x)$$

Nous supposerons $a\neq 0$, sinon, on a en fait une équation du premier ordre.

Pour simplifier, les fonctions considérées seront toujours définies sur $\mathbb{R}$. On ne le répétera donc pas à chaque fois.

A) ÉQUATION HOMOGÈNE (OU ÉQUATION SANS SECOND MEMBRE)

On appelle ainsi l'équation (E_0) : $ay''+by'+cy=0$. Quelles sont ses solutions ?
Par analogie avec ce qu'on a trouvé pour les équations du premier ordre, cherchons les solutions sous la forme : $y=e^{rx}$.
Lorsque l'on remplace dans l'équation, on obtient, après simplification :

Cette équation s'appelle équation caractéristique associée à l'équation différentielle. Elle admet toujours des solutions, éventuellement complexes si le discriminant est négatif.

Propriété :

Soit (E_0) : $ay''+by'+cy=0$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, d'équation caractéristique associée $ar^2+br+c=0$.
Le tableau ci-dessous donne les solutions en fonction de $\Delta=b^2-4ac$

	Solutions de l'équation caractéristique associée	Solution générale de (E_0)
$\Delta>0$	deux racines réelles $r_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y(x)=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$ (où $A\in\mathbb{R}$ et $B\in\mathbb{R}$)
$\Delta=0$	Une racine double réelle $r=-\dfrac{b}{2a}$	$y(x)=(Ax+B)e^{rx}$ (où $A\in\mathbb{R}$ et $B\in\mathbb{R}$)
$\Delta<0$	Deux racines complexes conjuguées $\alpha+i\beta$ et $\alpha-i\beta$ où $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$y(x)=e^{\alpha x}(A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x))$ (où $A\in\mathbb{R}$ et $B\in\mathbb{R}$)

Exemple : Résolution de l'équation différentielle (E_0) : $y''+\omega^2 y=0$

Exemple : Résolution de l'équation différentielle (E_0) : $2y''-5y'-3y=0$

Exemple : Résolution de l'équation différentielle (E_0) : $y''-2y'+y=0$

B) EQUATION AVEC SECOND MEMBRE

Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

Exemple : Résolution de l'équation différentielle (E) : $y''-2y'+y=e^x$

On a vu précédemment que les solutions de l'équation homogène (E_0) : $y''-2y'+y=0$ sont de la forme $y_0(x)=(Ax+B)e^x$ (où $A\in\mathbb{R}$ et $B\in\mathbb{R}$)

Recherchons une solution particulière de (E) de la forme ax^2e^x

Une solution particulière de (E) est

Les solutions générales de l'équation différentielle (E) sont de la forme

Remarque :

Il est facile de vérifier que **le principe de superposition** s'applique également dans le cas présent : si y_1 est solution particulière avec second membre d_1 et si y_2 est solution particulière avec second membre d_2, alors y_1+y_2 est solution particulière avec second membre d_1+d_2.

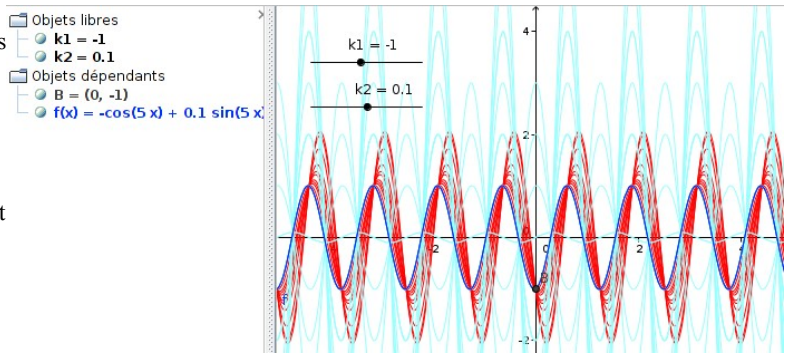
3) UNICITÉ DE LA SOLUTION SOUS CONDITIONS INITIALES

Les solutions de l'équation différentielle $y''+25\,y=0$ sont de la forme $f(x)=k_1\cos(5\,x)+k_2\sin(5\,x)$ (où $k_1\in\mathbb{R}$ et $k_2\in\mathbb{R}$)

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k_1 et k_2.

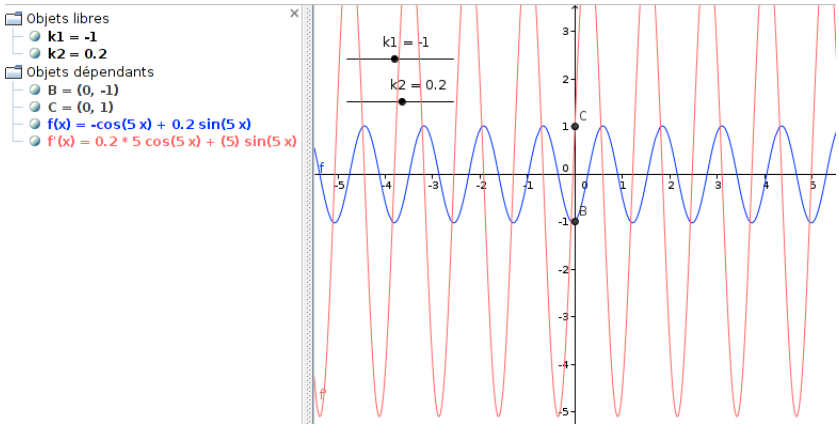
L'équation de l'exemple admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k_1 et k_2.

Contrairement à une équation linéaire du premier ordre, on peut observer qu'il y a une infinité de courbes telles que $f(0)=-1$.



Avec GeoGebra, on a représenté les fonctions f et f'.

On peut observer qu'il n'y a qu'une seule fonction telle que $f(0)=-1$ et $f'(0)=1$.



Propriété :

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre (E) possède une unique solution vérifiant deux conditions initiales.