QUELQUES NOTIONS SUR LES COMPLEXES

1) DÉFINITION

Définition :

On appelle **corps des nombres complexes**, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a+bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

Nombres complexes particuliers :

Soit un nombre complexe $z = a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel. ($\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$)
- si $a = 0$, on a $z = bi$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarques :
- $\mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points sur une droite. Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite.
  On peut donc toujours comparer deux nombres réels :
  si x et y sont des réels, on a nécessairement $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ (Le point d'abscisse x se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse y)
- $\mathbb{C}$, ensemble des nombres $a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
  Un nombre complexe $a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées $(a\,;b)$.
  On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.
  On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif.

2) FORME ALGÉBRIQUE

Propriété :

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a+bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est unique.

Définition :

Soit un nombre complexe z.
L'écriture $z = a+bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.
a est appelé **partie réelle** de z, et b **partie imaginaire** de z.
On note $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$.

Remarques :
- La partie réelle de z est un nombre réel.
- La partie imaginaire de z est un nombre réel.

Propriété :

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a
$$a+bi = a'+b'i \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \text{ et } b = b'$$

Exemple : Soit $z = 2+3i$ et $z' = i-5$. Calculer et écrire sous forme algébrique :

$z+z' = -3+4i$ $\qquad$ $z-z' = 7+2i$

$2z-3z' = 19+3i$ $\qquad$ $z \cdot z' = -13-13i$ $\qquad$ $z^2 = -5+12i$

3) CONJUGUÉ

Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a+bi$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a-bi$.

Exemple : Soit $z = 3+5i$ et $z' = -2+3i$. Calculer :

$\overline{z} = 3-5i$ $\qquad$ $\overline{z'} = -2-3i$ $\qquad$ $\overline{z}+\overline{z'} = 1-8i$ $\qquad$ $z+z' = 1+8i$

$\overline{z+z'} = 1-8i$ $\qquad$ $\overline{z}.\overline{z'} = -21+i$ $\qquad$ $\overline{zz'} = -21-i$ $\qquad$ $\overline{zz'} = -21+i$

Remarques :
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{z-z'} = \overline{z}-\overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$

4) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS REELS

Propriété :

L'équation $az^2+bz+c=0$, où a, b et c sont des réels (avec $a\neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).

Soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.

- si $\Delta\geqslant 0$, les deux solutions sont réelles : $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta<0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Le trinôme az^2+bz+c peut alors se factoriser sous la forme $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

Exemples :

- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-3z+5=0$

$\Delta=9-4\times 5=-11$
$\Delta<0$, l'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\dfrac{3-i\sqrt{11}}{2}$ et $z_2=\dfrac{3+i\sqrt{11}}{2}$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-3z-5=0$

$\Delta=9+4\times 5=29$
$\Delta>0$, l'équation admet donc deux solutions réels :

$z_1=\dfrac{3-\sqrt{29}}{2}$ et $z_2=\dfrac{3+\sqrt{29}}{2}$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-2\sqrt{5}z+5=0$

$\Delta=20-20=0$
$\Delta=0$, l'équation admet donc une solution réel (double) :

$z_0=\sqrt{5}$

Avec Xcas :

