ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

1) DÉFINITION

Définition :

Soit a , b et c trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et y la fonction inconnue, définie et dérivable sur l'intervalle I . On suppose de plus que la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I .

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation du type :

$$a(x)y'+b(x)y=c(x)$$

Une fonction f est solution de cette équation sur un intervalle I si

$$\forall x\in \mathrm{I}\ ,\ a(x)f'(x)+b(x)f(x)=c(x)$$

Les courbes représentatives des fonctions solutions s'appellent courbes intégrales.

Exemple : Par exemple, les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $x \longmapsto 3\mathrm{e}^x$ sont solutions de l'équation différentielle $y'-y=0$.

2) ÉQUATIONS À COEFFICIENTS CONSTANTS

Il s'agit d'équations pour lesquelles les fonctions a et b sont constantes. Quitte à diviser par a et à renommer les coefficients, on peut se ramener à une équation du type :

$$y'+ay=c(x)$$

Pour simplifier, les fonctions considérées seront toujours définies sur $\mathbb{R}$. On ne le répétera donc pas à chaque fois.

A) ÉQUATION HOMOGÈNE (OU ÉQUATION SANS SECOND MEMBRE)

On appelle ainsi l'équation $y'+ay=0$.

Propriété : *Équation linéaire du premier ordre homogène*

Soit un réel a .
Les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=0$ sont de la forme $y(x)=\lambda \mathrm{e}^{-ax}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=0$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=0$ sont la forme $y(x)=\lambda\,\mathrm{e}^{-5x}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$

Remarque :

L'équation différentielle $y'+5y=0$ peut aussi se noter $f'(x)+5f(x)=0$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+5y(x)=0$.
Cette dernière notation est très utilisée dans les différents domaines des sciences physiques.

B) ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE

Considérons l'équation différentielle (E): $y'+ay=c(x)$.
Soit y_p une solution particulière de cette équation. On remarque alors que :

- si y_0 est solution de l'équation homogène associée (E_0): $y'+ay=0$, alors y_0+y_p est solution de l'équation complète. En effet :

$y'_0+ay_0=0$ et $y'_p+ay_p=c(x)$ implique $(y_0+y_p)'+a(y_0+y_p)=c(x)$

- Inversement, si y est une autre solution de l'équation complète (E) , alors $y-y_p$ est solution de l'équation homogène (E_0) . En effet :

$y'+ay=c(x)$ et $y'_p+ay_p=c(x)$ implique $(y-y_p)'+a(y-y_p)=0$

La conséquence de cette remarque est la suivante :

Propriété :

Pour trouver **TOUTES** les solutions de l'équation complète (E), il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée (E_0), et de leurs ajouter **UNE** solution particulière de l'équation complète.

Remarque :

On remarque que, si y_1 est solution particulière avec second membre b_1 et si y_2 est solution particulière avec second membre b_2, alors y_1+y_2 est solution particulière avec second membre b_1+b_2 :

$$\begin{cases} y'_1+ay_1=b_1 \\ y'_2+ay_2=b_2 \end{cases} \text{ implique } (y_1+y_2)'+a(y_1+y_2)=b_1+b_2$$

C'est ce qu'on appelle **le principe de superposition**.

Exemples :

- Résoudre l'équation différentielle (E): $y'+y=e^{2x}$

  Les solutions de l'équation homogène $(E_0): y'+y=0$ sont de la forme $y_0(x)=\lambda e^{-x} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$
  Recherchons une solution particulière de (E) de la forme ae^{2x}
  On a : $2ae^{2x}+ae^{2x}=e^{2x} \Leftrightarrow 3ae^{2x}=e^{2x} \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$
  Une solution particulière (E) est $y_p(x)=\frac{1}{3}e^{2x}$.

  Les solutions générales de l'équation différentielle (E) sont de la forme $y(x)=y_p(x)+y_0(x)=\frac{1}{3}e^{2x}+\lambda e^{-x} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

- Résoudre l'équation différentielle (E): $y'+y=e^{-x}$

  Les solutions de l'équation homogène $(E_0): y'+y=0$ sont de la forme $y_0(x)=\lambda e^{-x} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

  Recherchons une solution particulière de (E) de la forme axe^{-x}

  On a : $ae^{-x}-axe^{-x}+axe^{-x}=e^{-x} \Leftrightarrow a=1$
  Une solution particulière de (E) est $y_p(x)=xe^{-x}$

  Les solutions générales de l'équation différentielle (E) sont de la forme $y(x)=y_p(x)+y_0(x)=xe^{-x}+\lambda e^{-x}$. $(\lambda\in\mathbb{R})$

- Résoudre l'équation différentielle (E): $y'+2y=x^2e^{-2x}+2e^{3x}+1+x$

  Les solutions de l'équation homogène $(E_0): y'+2y=0$ sont de la forme $y_0(x)=\lambda e^{-2x} \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

  Par linéarité (principe de juxtaposition), il suffit de chercher des solutions particulières pour chaque terme du second membre, et de les ajouter.

  - Équation différentielle (E_1): $y'+2y=x^2e^{-2x}$

  Cherchons une solution particulière de (E_1) sous la forme $(ax^3+bx^2+cx)e^{-2x}$.
  (Il est inutile de prendre un terme constant, car on obtient alors une solution de l'équation homogène, qui n'a aucune contribution au terme du second membre)

  On obtient :

$$(3ax^2+2bx+c)e^{-2x}-2(ax^3+bx^2+cx)e^{-2x}+2(ax^3+bx^2+cx)e^{-2x}=x^2e^{-2x} \Leftrightarrow e^{-2x}(3ax^2+2bx+c)=x^2e^{-2x} \Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=x^2$$

Par identification, on a $\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$.

Une solution particulière de (E_1) est $y_{p_1}(x)=\frac{x^3}{3}e^{-2x}$

- Équation différentielle (E_2) : $y'+2y=2e^{3x}$

Cherchons une solution particulière de (E_2) sous la forme ae^{3x} . On obtient :

$$3ae^{3x}+2ae^{3x}=2e^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad 5ae^{3x}=2e^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad 5a=2 \quad \Leftrightarrow \quad a=\frac{2}{5}$$

Une solution particulière de (E_2) est $y_{p_2}(x)=\frac{2}{5}e^{3x}$

- Équation différentielle (E_3) : $y'+2y=1+x$.

Cherchons une solution particulière de (E_3) sous la forme $ax+b$. On obtient :

$$a+2ax+2b=1+x \quad \Leftrightarrow \quad (a+2b)+(2a)x=1+x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+2b=1 \\ 2a=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Une solution particulière de (E_3) est $y_{p_3}(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$

En appliquant le principe de juxtaposition, on en déduit que les solutions générales de l'équation différentielle (E) : $y'+2y=x^2e^{-2x}+2e^{3x}+1+x$ sont de la forme

$$y(x)=y_0(x)+y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)+y_{p_3}(x)=\lambda e^{-2x}+\frac{x^3}{3}e^{3x}+\frac{2}{5}e^{3x}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

3) UNICITÉ DE LA SOLUTION VÉRIFIANT UNE CONFITION INITIALE DONNÉE

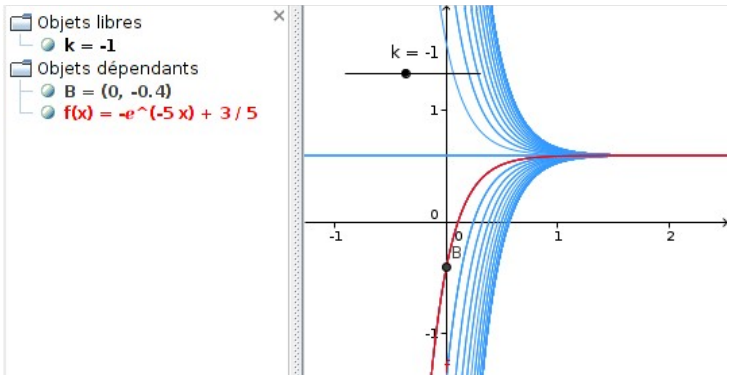
Exemple : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=3$.

Les solutions de l'équation différentielle $y'+5y=3$ sont les fonctions de la forme $y(x)=ke^{-5x}+\frac{3}{5}$ où $k \in \mathbb{R}$

Avec GeoGebra, on a représenté les solutions pour différentes valeurs de k .

$k=10$, $k=9$, …

L'équation admet une infinité de solutions, autant que de valeurs différentes de k



On peut observer qu'il n'y a qu'une seule courbe telle que $f(0)=-0{,}4$.

Propriété : *Solution vérifiant une condition initiale donnée*

Pour tout couple de réel $(x_0\,;\,y_0)$, l'équation $y'+ay=c(x)$ (où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$) admet une solution et une seule telle que $f(x_0)=y_0$

Exemple : Déterminer la solution de l'équation différentielle $y'+5y=3$ telle que $f(0)=1$.

Il suffit de résoudre l'équation $k\,\mathrm{e}^{-5\times 0}+\frac{3}{5}=1$. On trouve $k=\frac{2}{5}=0{,}4$

L'unique solution est donc la fonction définie par $f(x)=0{,}4\mathrm{e}^{-5x}+\frac{3}{5}$