LOI EXPONENTIELLE

Cette loi **à densité** modélise le phénomène de "mort sans vieillissement", observé par exemple pour la désintégration radioactive.

Définition :

Soit λ un réel strictement positif.
La **loi exponentielle de paramètre** λ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f : t \longmapsto \lambda\, e^{-\lambda t}$$

Cette loi est souvent notée $E(\lambda)$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ **(**$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$**)**.

- Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $0 \leqslant c \leqslant d$, on a :
$$P(X \in [c\,;d]) = P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$
- Pour tout réel $a \geqslant 0$, $P(X \leqslant a) = P(X < a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- Pour tout réel $a \geqslant 0$, $P(X \geqslant a) = P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = e^{-\lambda a}$

Exemples :

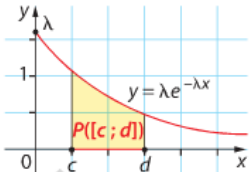
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2 :

$$P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \int_1^2 2\, e^{-2t}\, dt = \left[-e^{-2t}\right]_1^2 = -e^{-4} + e^{-2} = \frac{e^2 - 1}{e^4} \approx 0{,}117$$

$$P(X > 1) = 1 - \int_0^1 2\, e^{-2t}\, dt = 1 - \left(-e^{-2} + 1\right) = e^{-2} \approx 0{,}135$$

Remarques :

- On a $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = 1$ (en effet $\lim\limits_{a \to +\infty} \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = 1$)
- La probabilité de l'intervalle $[c\,;d]$ s'interprète comme l'aire comprise entre la courbe représentant la densité, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = c$ et $x = d$.



Définition :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

On a $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Remarque : L'espérance $\frac{1}{\lambda}$ est appelée la durée moyenne de vie de la variable aléatoire X.