LOI DE POISSON

Cette loi modélise les petites probabilités ou les événements rares (c'est-à-dire des événements avec une probabilité faible) et sans mémoire, dans un intervalle de temps donné par exemple : le nombre d'atomes désintégrés par unité de temps , le nombre de chèques émis sans provision, le nombre de fautes d'impression dans les pages d'un livre, le nombre de personnes atteintes d'une maladie ...

Rappel : $n!$ se lit « factorielle n»

$2!=2\times1$, $3!=3\times2\times1$, $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1$

Définition :

On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une **loi de Poisson de paramètre** λ (avec $\lambda>0$) lorsque :

- l'ensemble de ses valeurs est $\mathbb{N}$
- pour tout $k\in\mathbb{N}$ tel que , $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Cette loi est souvent notée $P(\lambda)$

Exemple :

Une usine produit des bouteilles d'eau. Parmi celles-ci, 3% sont défectueuses. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 bouteilles prises au hasard, associe le nombre de bouteilles défectueuses. On admet que X suit une loi de Poisson de paramètre 3. Déterminer la probabilité qu'un tel lot ait deux bouteilles défectueuses.

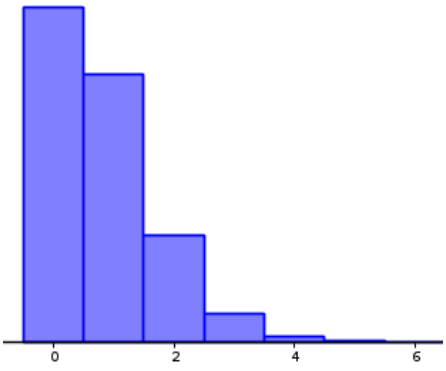
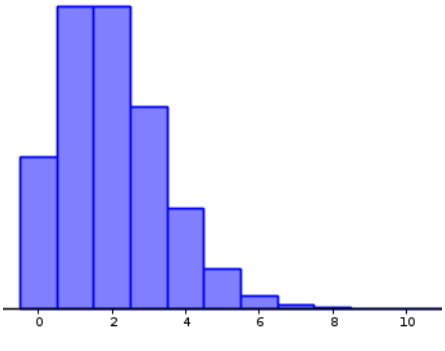
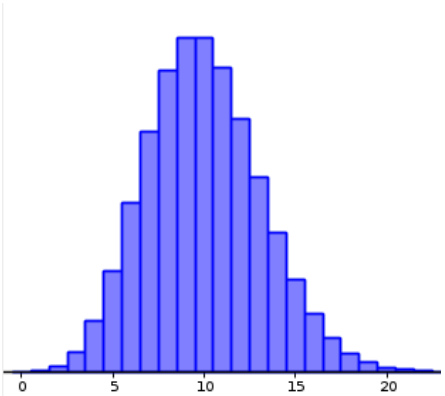
$P(X=2)=e^{-3}\frac{3^2}{2!}$

Propriété :

La loi de Poisson de paramètre λ a pour

- espérance mathématique : $E(X)=\lambda$
- variance : $V(X)=\lambda$
- écart type : $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$

Comme on peut le voir sur les exemples ci-dessous, cette loi est asymétrique mais le devient de moins en moins au fur et à mesure que λ augmente

$\lambda=0,8$	$\lambda=2$	$\lambda=10$
		

Dans la pratique, si n est « grand », p « voisin » de 0 et np pas « trop grand », on considère en général la loi de Poisson de paramètre np comme une bonne approximation de la loi binomiale.

Plus précisément, si $n\geqslant50$, $p\leqslant0,1$ et $np\leqslant10$, alors on considère que la loi $B(n;p)$ est « proche » de la loi $P(np)$, ce qui permet d'utiliser la loi de Poisson (à un seul paramètre) plutôt que la loi binomiale (à deux paramètres).

On retiendra que, sous certaines conditions, on peut approcher une loi binomiale par une loi de Poisson ayant la même espérance