1ère **Devoir surveillé n ° 7**

- Durée 1h30
- Calculatrices de lycée autorisées

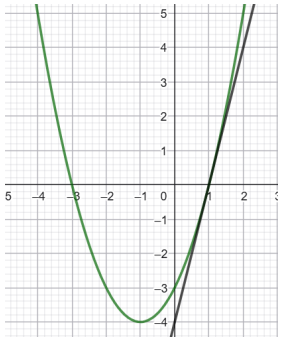


Barème :	**Nom :**
1) 4 pts **2)** 5 pts **3)** 6 pts **3)** 5 pts	

Ex 1 : Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, parmi lesquelles une seule est correcte.
Une réponse juste apporte 1 point . Une réponse fausse enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.
Entourer la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
La parabole P ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et la droite D est la tangente à la courbe P au point d'abscisse 1

.

	A	**B**	**C**	**D**
1) L'équation $g'(x)=0$ a :	1 solution	2 solutions	On ne peut pas savoir	une infinité de solutions
2) L'inéquation $g'(x)<0$ a pour ensemble de solutions :	$]-3;-1]$	$]-\infty\ ;-3]$	$]-\infty\ ;-1[$	$[-1\ ;+\infty\ [$
3) On a $g'(1)=$:	-4	$-\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{4}$
4) On a $g'(-3)=$:	-4	$-\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{4}$



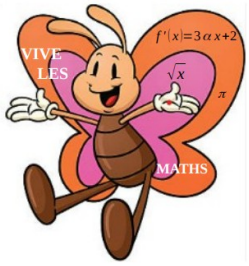
Ex 2 : On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{6x+3}{x^2+1}$



a) Justifier l'ensemble de définition de f .

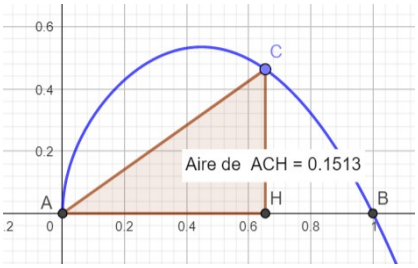
b) Déterminer f '

3) Déterminer le tableau de variations de f .



4) En déduire en quelles valeurs sont atteints les éventuels extrema de f .
En utilisant la calculatrice, conjecturer si les extrema obtenus sont locaux ou globaux.

Ex 3 : La courbe d'équation $y=\sqrt{x}(1-x^2)$ coupe l'axe des abscisses en A et B.
Le point $C(x;y)$ se déplace sur la courbe entre A et B. Le but du problème est de déterminer l'abscisse du point C pour que l'aire du triangle rectangle AHC soit maximale.
1) Déterminer (par le calcul) les coordonnées des points A et B.

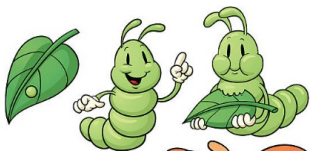


2) On note $f(x)$, l'aire du triangle en fonction de x .
a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Déterminer $f(x)$

3) Montrer que pour $x\in]0;1]$, $f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{4}(3-7x^2)$. (On admet que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$)

4) Déterminer le tableau de variation de f , puis répondre au problème posé.

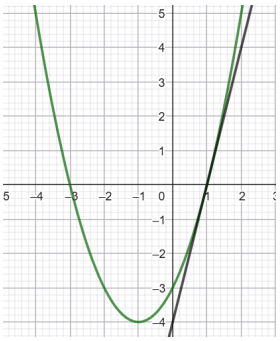


Ex 4 : En utilisant la fonction d définie par $d(x)=x^2-x\sqrt{x}+\frac{1}{2}$, montrer que pour tout $x\in]0;4]$, $x^2\geqslant x\sqrt{x}-\frac{1}{2}$.

Correction :

Ex 1 :

	A	B	C	D
1) L'équation $g'(x)=0$ a :	1 solution	2 solutions	On ne peut pas savoir	une infinité de solutions
2) L'inéquation $g'(x)<0$ a pour ensemble de solutions :	$]-3;-1]$ juste	$]-\infty\ ;-3]$	$]-\infty\ ;-1[$ juste	$[-1\ ;+\infty[$
3) On a $g'(1)=$:	-4	$-\frac{1}{4}$	4 juste	$\frac{1}{4}$
4) On a $g'(-3)=$:	-4 juste	$-\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{4}$



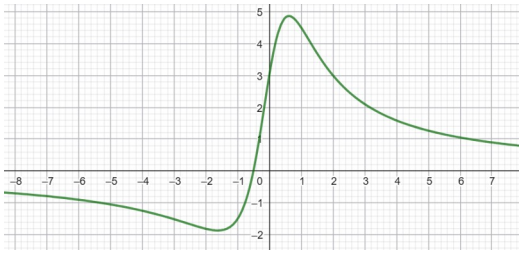
Ex 2 :

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+1>0$, donc $D_f=\mathbb{R}$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction rationnelle) et $f'(x)=3\times\dfrac{2(x^2+1)-2x(2x+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{6(-x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}$

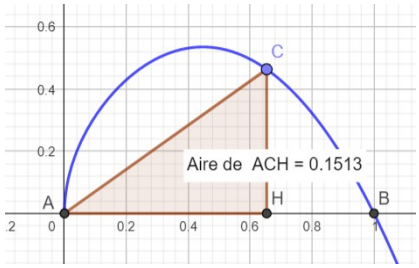
3) $f'(x)$ est du signe de $-x^2-x+1$. On a $\Delta=5$, $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
f		↘	$f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$	↗	$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	↘	



4) D'après le tableau ci-dessus et grâce à la représentation graphique (ou en calculant quelques grandes valeurs) on conjecture que, le minimum de f est atteint en $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et que le maximum est atteint en $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ex 3 :



1) sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1-x^2)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0$ ou $x^2=1 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

On en déduit A(0;0) et B(1;0)

2) a) $D_f=[0\ ;1]$. b) $f(x)=\dfrac{AH\times HC}{2}=\dfrac{x\sqrt{x}(1-x^2)}{2}=\dfrac{\sqrt{x}(x-x^3)}{2}$

3) f est dérivable sur]0;1], par opérations sur les fonctions dérivables . Pour tout $x>0$, on a :

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left((\sqrt{x})'(x-x^3)+\sqrt{x}(x-x^3)'\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-x^3)+\sqrt{x}(1-3x^2)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x-x^3}{2\sqrt{x}}+\frac{2x(1-3x^2)}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{x}}(x-x^3+2x-6x^3)=\frac{3x-7x^3}{4\sqrt{x}}=\frac{x}{4\sqrt{x}}(3-7x^2)$$

On obtient bien:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{4}(3-7x^2)$$

4) Sur]0;1] $\dfrac{\sqrt{x}}{4}>0$, donc $f'(x)$ est du signe de $3-7x^2$

Sur]0;1] , $3-7x^2>0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{7}>x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{3}{7}}>x>0 \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

x	0		$\frac{\sqrt{21}}{7}$		1
$f'(x)$	0	+	0	-	
f	0	↗		↘	0

L'aire est donc maximale pour $x_C=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

Ex 4 :

Soit la fonction d définie sur I par $d(x)=x^2-x\sqrt{x}+\frac{1}{2}$

d est dérivable sur I par somme et produit de fonctions dérivables sur I .

Pour tout $x\in$I , on a : $d'(x)=(x^2)'-((x)'\sqrt{x}+x(\sqrt{x})')+\left(\frac{1}{2}\right)'$

$d'(x)=2x-\left(\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=2x-\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}=2x-\frac{3\sqrt{x}}{2}=\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{2}\right)$

Sur I, $\sqrt{x}>0$, donc $d'(x)$ est du signe de $2\sqrt{x}-\frac{3}{2}$

Sur I, on a : $2\sqrt{x}-\frac{3}{2}>0\Leftrightarrow 2\sqrt{x}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}>\frac{3}{4}\Leftrightarrow x>\frac{9}{16}$

x	0		$\frac{9}{16}$		4
$d'(x)$	‖	-	0	+	
d	‖	↘	$\frac{101}{256}$	↗	

Ainsi, pour tout $x\in$I , on a : $d(x)>0$ et $x^2\geqslant x\sqrt{x}-\frac{1}{2}$