1ère **Devoir surveillé n ° 3**

- Durée 1h30
- Calculatrices de lycée autorisées



Barème :	**Nom :**
1) 2 pts **2)** 4,5 pts **3)** 3,5 pts **4)** 4,5 pts **5)** 2,5 pts **6)** 3 pts	

Ex 1 : Indiquer, en justifiant la réponse, si les deux réels ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

1) 15,7 et 9,42

2) $\frac{17\pi}{11}$ et $\frac{-71\pi}{11}$

Ex 2 :

1) a) Simplifier au maximum l'expression :

$A(x)=2\cos(x-3\pi)+3\cos(\pi+x)+6\cos(-x)$

b) En déduire, en expliquant la démarche utilisée une valeur exacte de :

$2\cos\left(\frac{-11\pi}{4}\right)+3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+6\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

2) Simplifier au maximum l'expression : $B(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}-2x\right)+\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)$

Ex 3 :

1) On admet la formule $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$. En déduire, en expliquant la démarche utilisée une formule permettant de calculer $\cos(2a)$

2) En déduire, en expliquant la démarche utilisée la formule suivante : $\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$

3) En utilisant la formule précédente, déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Ex 4 : P**artie A : Résolution d'une équation**

On considère l'équation (E) : $2\cos^2(x)-\cos(x)-1=0$, pour $x\in[0;2\pi[$.

1) On pose $X=\cos(x)$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2-X-1=0$.

2) En déduire les solutions de (E) dans $x\in[0;2\pi[$.

Partie B : Étude d'une inéquation

On considère l'inéquation (I) : $2\sin^2(x)+\sin(x)-1\leq 0$, pour $x\in[0;2\pi[$.

1) On pose $Y=\sin(x)$. Étudier le signe du trinôme $2Y^2+Y-1$ selon les valeurs de Y .

2) En déduire que (I) équivaut à $-1\leq\sin(x)\leq\frac{1}{2}$.

3) Résoudre (I) dans $x\in[0;2\pi[$.

Ex 5 : Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique. Soit $N(0,5\cos\alpha ; -0,5\sin\alpha)$ où α est un réel.
Déterminer s'il est situé à l'intérieur du cercle trigonométrique, sur le cercle , ou à l'extérieur du cercle.

Ex 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

1) $\cos(2x) = -2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

2) $6\sin x + 1 = -2$

Correction :

Ex 1 :

1) 15,7-9,42=6,28 qui n'est pas un multiple de 2π : NON

2) $\frac{17\pi}{11}+\frac{71\pi}{11}=\frac{88\pi}{11}=8\pi=4\times 2\pi$:OUI

Ex 2 :

1) a) $A(x)=2\cos(x-3\pi)+3\cos(\pi+x)+6\cos(-x)=2\cos(\pi-x)-3\cos(x)+6\cos(x)=-2\cos(x)-3\cos(x)+6\cos(x)=\cos(x)$

b) Il suffit dans la formule précédente de prendre $x=\frac{\pi}{4}$, on obtient : $2\cos\left(\frac{-11\pi}{4}\right)+3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+6\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $B(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}-2x\right)+\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}-2x\right)+\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)=\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)+\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)=1$

Ex 3 :

1) $\cos(2a)=\cos(a)\cos(a)-\sin(a)\sin(a)=\cos^2 a-\sin^2 a$

2) On a alors : $\cos(2a)=\cos^2(a)-(1-\cos^2(a))=2\cos^2(a)-1$, ce qui donne bien $\cos^2(a)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$

3) On a $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Comme $0\leqslant\frac{\pi}{8}\leqslant\frac{\pi}{2}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$. Ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Ex 4 :

Partie A

1. $\Delta=(-1)^2-4\times 2\times(-1)=1+8=9>0$.
   Deux racines : $X_1=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$ et $X_2=\frac{1+3}{4}=1$. (ou méthode de la racine évidente)
2. On résout $\cos(x)=-\frac{1}{2}$ ou $\cos(x)=1$ sur $[0;2\pi[$:
   - $\cos(x)=1\Leftrightarrow x=0$

$$S=\left\{0;\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right\}$$

   - $\cos(x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}$ ou $x=\frac{4\pi}{3}$

Partie B

1. Déjà vu : $Y_1=-1$ et $Y_2=\frac{1}{2}$.
   Le coefficient de Y^2 est positif, donc le trinôme est négatif entre les racines : $2Y^2+Y-1\leq 0\Leftrightarrow -1\leq Y\leq\frac{1}{2}$.
2. Comme $Y=\sin(x)$, l'inéquation (I) équivaut à $-1\leq\sin(x)\leq\frac{1}{2}$.
3. La condition $\sin(x)\geq -1$ est toujours vraie. Il reste $\sin(x)\leq\frac{1}{2}$.
   On a $\sin(x)=\frac{1}{2}$ pour $x=\frac{\pi}{6}$ et $x=\frac{5\pi}{6}$.

$$S=\left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};2\pi\right[$$

   Sur le cercle trigonométrique, $s(x)\leq\frac{1}{2}$ lorsque le point est en dessous de la droite d'ordonnée $\frac{1}{2}$:

Ex 5 : $ON^2 = x_N{}^2 + y_N{}^2 = (0{,}5\cos\alpha)^2 + (-0{,}5\sin\alpha)^2 = 0{,}25\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = 0{,}25$. Donc ON<1 et N est à l'intérieur du cercle .

Ex 6 :

1) $\cos(2x) = -2\cos^2 x - 2\sin^2 x$
$\Leftrightarrow \cos(2x) = -2\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$
$\Leftrightarrow \cos(2x) = -2$

Ce qui est impossible.

2) $6\sin x + 1 = -2 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$