TSTI2D **Devoir Surveillé n ° 3**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 14 pts **2)** 6 pts	

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …*

Ex 1 :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]-4\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+8x+7}{(x+4)^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1) a) Déterminer la limite de la fonction f en -4.
b) En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C_f dont on précisera l'équation.
c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
d) En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C_f dont on précisera l'équation.

2) a) Vérifier que la dérivée de la fonction f est définie par $f'(x)=\dfrac{18}{(x+4)^3}$
b) Étudier son signe et dresser le tableau de variation de la fonction f.

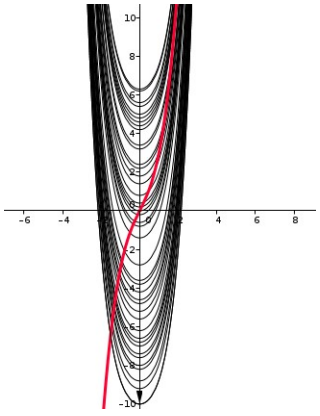
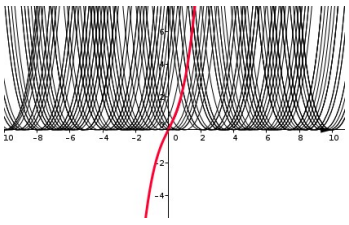
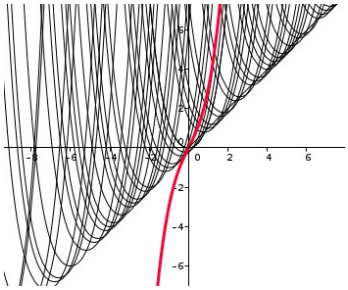
3) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec les axes du repère.

4)a) Sans en déterminer l'équation, tracer dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ la tangente à C_f au point d'abscisse -1.
b) Tracer ensuite les asymptotes déterminées à la question 1, puis la courbe C_f.

5)a) Montrer que, pour tout $x\in]-4\,;+\infty[$, on a $f(x)=1-\dfrac{9}{(x+4)^2}$
b) En déduire la primitive F de f sur $]-4\,;+\infty[$ dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(-1\,;0)$

Ex2 : QCM (1,5 point par bonne réponse)

Choisir la bonne réponse :

	A	B	C
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^4+x^2+1)^4$. Alors $f'(x)=$	$(4x^3+2x)^4$	$4(x^4+x^2+1)^3$	$(16x^3+8x)(x^4+x^2+1)^3$
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3}{(x^2+4)^6}$. Alors $f'(x)=$	$\dfrac{3}{(2x)^6}$	$-\dfrac{18}{(x^2+4)^7}$	$\dfrac{-36x}{(x^2+4)^7}$
Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par $f(t)=\cos(5t)+t$ est $F(t)=$	$\sin(5t)+\dfrac{t^2}{2}+1$	$\dfrac{1}{5}\sin(5t)+\dfrac{t^2}{2}+1$	$-5\sin(5t)+1$
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+2x$. On a représenté avec GeoGebra les courbes représentatives des primitives de la fonction f. Choisir la bonne représentation.			

Correction :

Ex 1 :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]-4\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+8x+7}{(x+4)^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1) a) Déterminer la limite de la fonction f en -4.

$\lim\limits_{x\to -4}(x+4)^2=0^+$ et $\lim\limits_{x\to -4}(x^2+8x+7)=-9$
Par quotient, on en déduit que $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=-\infty$

b) En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C_f dont on précisera l'équation.

On en déduit que C_f admet la droite d'équation $x=-4$ comme asymptote verticale.

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ (fonction rationnelle)

d) En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C_f dont on précisera l'équation.

On en déduit que C_f admet la droite d'équation $y=1$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

2) a) Vérifier que la dérivée de la fonction f est définie par $f'(x)=\dfrac{18}{(x+4)^3}$
f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition .
Pour tout $x>-4$, on a :

$$f'(x)=\frac{(2x+8)\times(x+4)^2-(x^2+8x+7)\times 2\times(x+4)}{(x+4)^4}=\frac{(x+4)((2x+8)(x+4)-2(x^2+8x+7))}{(x+4)^4}=\frac{2x^2+8x+8x+32-2x^2-16x-14}{(x+4)^3}$$

Donc $f'(x)=\dfrac{18}{(x+4)^3}$

b) Étudier son signe et dresser le tableau de variation de la fonction f.

Pour tout $x>-4$, on a $f'(x)>0$

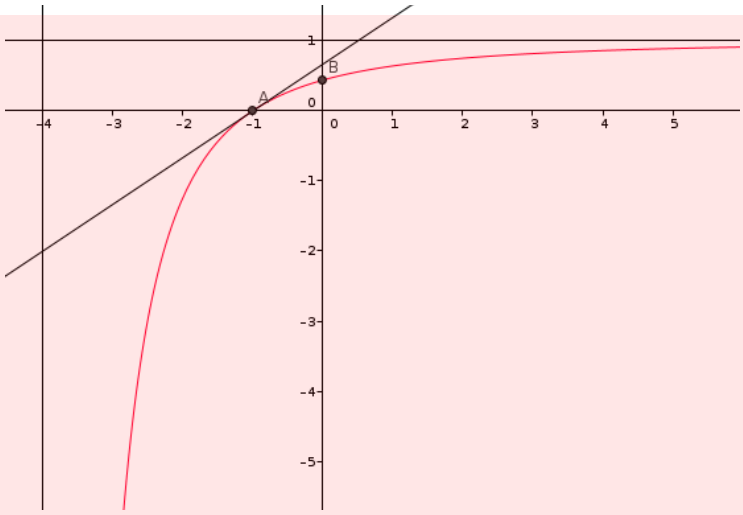
x	-4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖	↗	1
	$-\infty$		

3) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec les axes du repère.

$f(0)=\dfrac{7}{16}$; C_f coupe l'axe des ordonnées en $A\left(0\,;\dfrac{7}{16}\right)$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+8x+7=0$
$\Delta=64-4\times 7=36$ et $x_1=\dfrac{-8-6}{2}=-7$ et $x_2=\dfrac{-8+6}{2}=-1$
-7 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f . C_f coupe donc l'axe des abscisses en $B(-1\,;0)$

4)a) Sans en déterminer l'équation, tracer dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ la tangente à C_f au point d'abscisse -1.
b) Tracer ensuite les asymptotes déterminées à la question 1, puis la courbe C_f.



5)a) Montrer que, pour tout $x \in]-4\,;+\infty[$, on a $f(x)=1-\dfrac{9}{(x+4)^2}$

Pour tout $x>-4$, $1-\dfrac{9}{(x+4)^2}=\dfrac{(x+4)^2-9}{(x+4)^2}=\dfrac{x^2+8x+16-9}{(x+4)^2}=\dfrac{x^2+8x+7}{(x+4)^2}=f(x)$

b) En déduire la primitive F de f sur $]-4\,;+\infty[$ dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(-1\,;0)$

L'ensemble des primitives de la fonctions f sur $]-4\,;+\infty[$ sont les fonctions F_k définies sur $]-4+\infty[$ par $F_k(x)=x+\dfrac{9}{x+4}+k$

$F_k(-1)=0 \Leftrightarrow -1+\dfrac{9}{3}+k=0 \Leftrightarrow k=-2$

La primitive cherchée est F_{-2}

Ex2 : QCM (1 point par bonne réponse)

Choisir la bonne réponse :

	A	B	C
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^4+x^2+1)^4$. Alors $f'(x)=$	$(4x^3+2x)^4$	$4(x^4+x^2+1)^3$	$(16x^3+8x)(x^4+x^2+1)^3$
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3}{(x^2+4)^6}$. Alors $f'(x)=$	$\dfrac{3}{(2x)^6}$	$-\dfrac{18}{(x^2+4)^7}$	$\dfrac{-36x}{(x^2+4)^7}$
Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par $f(t)=\cos(5t)+t$ est $F(t)=$	$\sin(5t)+\dfrac{t^2}{2}+1$	$\dfrac{1}{5}\sin(5t)+\dfrac{t^2}{2}+1$	$-5\sin(5t)+1$
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+2x$. On a représenté avec GeoGebra les courbes représentatives des primitives de la fonction f. Choisir la bonne représentation.	