TSTI2D **Devoir Surveillé n ° 5**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

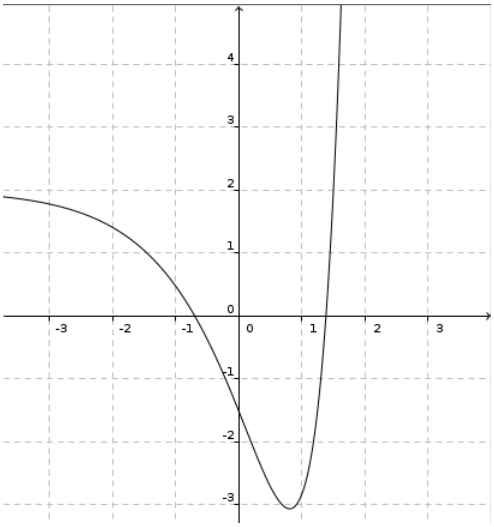
Barème :	**Nom :**
1) 14 pts **2)** 3 pts **3)** 3 pts	

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …*

Ex 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-\frac{9}{2}e^{x}+2$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.



Partie A :

1) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2) En déduire que la courbe C_f admet une asymptote Δ dont on précisera une équation.
3) Justifier que pour tout réel x , $f(x)=(e^{x}-4)\left(e^{x}-\frac{1}{2}\right)$
4) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie B :

1) Montrer que, pour tout réel x , $f'(x)=2e^{x}\left(e^{x}-\frac{9}{4}\right)$
2) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau complet des variations de la fonction f (on calculera en particulier la valeur exacte de l'extremum)

Partie C :

Les questions ci-dessous doivent toutes être résolues sans calculs, uniquement à partir du graphique fourni.
1) Quelle est l'équation de la tangente D en 0 à la courbe C_f ?
2) Résoudre l'équation $f(x)=0$.
3) Résoudre l'inéquation $f(x)\leqslant 2$.

Ex2 :

Simplifier l'expression suivante : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

Ex3 :

Exprimer $\frac{\pi}{12}$ en fonction de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$.

En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$

Correction :

Ex 1 :

120 **Partie A**

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote Δ d'équation $y = 2$.

3. Pour tout réel x,

$(e^x - 4)\left(e^x - \frac{1}{2}\right) = e^{2x} - 4e^x - \frac{1}{2}e^x + 2 = f(x)$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B

5. Pour tout réel x, $f'(x) = 2e^{2x} - \frac{9}{2}e^x = 2e^x\left(e^x - \frac{9}{4}\right)$.

6. La dérivée est composée de deux facteurs, l'un positif, et l'autre qu'il faut étudier.

$e^x - \frac{9}{4} = 0$ si et seulement si $x = \ln\frac{9}{4}$.

La fonction est donc décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty ; \ln\frac{9}{4}\right]$ et croissante ensuite.

Le minimum est atteint en $\ln\frac{9}{4}$.

Il vaut $f\left(\ln\left(\frac{9}{4}\right)\right) = \left(\frac{9}{4}\right)^2 - \frac{9}{2} \times \frac{9}{4} + 2 = -\frac{81}{16} + 2 = -\frac{49}{16}$.

Partie C

1. L'équation de la tangente $\mathscr{D}$ en 0 à la courbe $\mathscr{C}_0$ est $y = -2{,}5x - 1{,}5$.

2. L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions $x = -0{,}6$ et $x = 1{,}4$.

3. Les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 2$ correspondent à l'ensemble des valeurs de l'intervalle $]-\infty ; 1{,}5]$

Ex2 :

Simplifier l'expression suivante : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(x) = 0$

Ex3 :

Exprimer $\frac{\pi}{12}$ en fonction de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$.

En déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$

On a $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

Ainsi $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$