Texp **Devoir n ° 2**

- Durée 1 h 30
- Calculatrices autorisées



Note :	**Nom :**
/20	

4 pts **Ex 1 :**

1) Développer $(a-b)^4$

2) En utilisant les formules d'Euler, en déduire la linéarisation de $\sin^4 x$

3) En déduire la linéarisation de $\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)$.

3 pts **Ex 2 :**

On pose $Z=\frac{4+4\sqrt{3}i}{2+2i}$. Sans « balancer » le résultat de la calculatrice qui aurait tendance à m'agacer… montrer que Z^{12} est un réel.

3 pts **Ex 3 :** On pose $a=1+e^{i\frac{11\pi}{9}}$. Déterminer une forme exponentielle de a .

6 pts **Ex 4 :**

1) On considère l'équation **(E₁)** : $z^2 = -3 + 4i$. On pose $z = x + iy$ où *x* et *y* sont des réels.

a) Combien cette équation a-t-elle de solutions dans $\mathbb{C}$?

b) Trouver un système d'équations vérifié par *x* et *y*.

c) Ce système est-il suffisant pour déterminer *x* et *y* ? (la réponse est évidente… étant donné les questions suivantes)

d) En utilisant le module, déterminer une autre équation vérifiée par *x* et *y*.

e) En déduire *x* et *y*.

f) En déduire les solutions (que l'on notera z_1, z_2) de l'équation (E_1).

2) On considère maintenant l'équation **(E)** : $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$

a) Combien cette équation admet-elle de solutions dans $\mathbb{C}$?

b) Montrer que si z est solution de (E), alors $\bar{z}$ est aussi solution de (E).

c) Montrer que les solutions de l'équation (E_1) sont aussi des solutions de l'équation (E).

d) En déduire sans calcul toutes les solutions de (E).

4 pts **Ex 5 :** Soit $P(z) = z^3 - 2z^2 + 4z - 8$.

1) a) Trouver $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $i\alpha$ soit une racine de *P*.

b) En déduire (sans démonstration) une autre racine de *P*.

2) Justifier que *P(z)* peut être factorisé par $z^2 + 4$.

3) Déterminer l'ensemble des racines de *P*.

Correction :

2 pts **Ex 1 :**

1) $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

2) $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, donc

$$\sin^4 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\frac{1}{16}\left(e^{i4x}-4e^{i2x}+6-4e^{-i2x}+e^{-i4x}\right)$$

$$\sin^4 x=\frac{1}{16}(2\cos(4x)-8\cos(2x)+6)=\frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$$

3) En remplaçant x par $\frac{x}{2}$:

$$\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{8}\cos(2x)-\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{3}{8}$$

2 pts **Ex 2 :**

$4+4\sqrt{3}i$ a pour module 8 et pour argument $\frac{\pi}{3}$; $2+2i$ a pour module $2\sqrt{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{4}$. Donc :

$$Z=\frac{8e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$Z^{12}=(2\sqrt{2})^{12}e^{i12\times\frac{\pi}{12}}=(2\sqrt{2})^{12}e^{i\pi}=-(2\sqrt{2})^{12}=-262144$$

Z^{12} est donc bien un réel (négatif).

2 pts **Ex 3 :**

$$a=1+e^{i\frac{11\pi}{9}}=e^{i\frac{11\pi}{18}}\left(e^{-i\frac{11\pi}{18}}+e^{i\frac{11\pi}{18}}\right)=2\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)e^{i\frac{11\pi}{18}}$$

Or $\frac{11\pi}{18}\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, donc $\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)<0$. Il faut alors écrire :

$$a=-e^{i\pi}2\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)e^{i\frac{11\pi}{18}}=-2\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)e^{i\left(\frac{11\pi}{18}+\pi\right)}=2\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)e^{-i\frac{7\pi}{18}}$$

Une forme exponentielle de a est donc $a=2\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)e^{-i\frac{7\pi}{18}}=2\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)e^{-i\frac{7\pi}{18}}$.

2 pts **Ex 4 :**

1) a) 2 solutions.

b) En posant $z=x+iy$, l'équation (E_1) devient : $\begin{cases}x^2-y^2=-3\\2xy=4\end{cases}$

c) Non

d) En prenant le module des deux membres : $|-3+4i| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$, d'où $x^2+y^2=5$

e) En combinant avec $x^2-y^2=-3$, on obtient $x^2=1 \quad \text{et} \quad y^2=4$, donc $x=1$ ou $x=-1$ et $y=-2$ ou $y=2$

Comme $2xy=4>0$, x et y sont de même signe : $(x,y)=(1,2)$ ou $(x,y)=(-1,-2)$

f) Les solutions de (E_1) sont donc : $z_1=1+2i \quad \text{et} \quad z_2=-1-2i$

2) a) 4 solutions (équation de degré 4).

b) $z^4+6z^2+25=0 \quad \Rightarrow \quad \overline{z^4+6z^2+25}=\overline{0} \quad \Rightarrow \quad \overline{z}^4+6\overline{z}^2+25=0$

c) Soit on pose $Z=z^2$ et on résout l'équation bicarrée , soit on se contente de vérifier :

Si $z^2=-3+4i$ alors $(-3+4i)^2=(-3)^2+2(-3)(4i)+(4i)^2=9-24i-16=-7-24i$, d'où :
$(-7-24i)+6(-3+4i)+25=0$. Les solutions de (E_1) vérifient donc (E).

d) Les solutions de (E_1) sont solutions de (E), d'après la question 2c) leurs conjuguées sont aussi solutions. On obtient :

$\{1+2i,\ -1-2i,\ 1-2i,\ -1+2i\}$

2 pts **Ex 5 :**

1) a) On calcule $P(i\alpha)=(i\alpha)^3-2(i\alpha)^2+4(i\alpha)-8$, c'est-à-dire $P(i\alpha)=(2\alpha^2-8)+i(4\alpha-\alpha^3)$. Pour que $i\alpha$ soit racine, il faut : $\begin{cases}2\alpha^2-8=0\\4\alpha-\alpha^3=0\end{cases}$, ce qui donne $\alpha=2 \quad \Longrightarrow \quad z=2i \text{ est racine de } P$

b) Comme les coefficients de P sont réels, le conjugué d'une racine est aussi une racine : $-2i$ est donc aussi racine de P.

2) Les nombres $2i$ et $-2i$ étant racines, P est divisible par $(z-2i)(z+2i)=z^2+4$

3) En effectuant la division polynomiale ou en utilisant la méthode d'identification, on obtient $P(z)=(z^2+4)(z-2)$. L'ensemble des racines de P est donc : $\{2,\ 2i,\ -2i\}$