PROBABILITÉS ET PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

1) EXPÉRIENCES ALÉATOIRES

A) EXPÉRIENCE ALÉATOIRE , ÉVENTUALITÉ , UNIVERS

Un exemple bien connu : (On considère cet exemple jusqu'à la fin du chapitre)

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

Lancer ce dé **et noter** le nombre figurant sur une des faces est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat : 1 , 2 , … , 6 ?

On dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire** , c'est à dire une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues, appelées **éventualités**.

L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers** . En général, on le note Ω .

Exemple : Les éventualités sont 1 , 2 , 3 , 4 , 5 et 6 et $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

B) ÉVÉNEMENT

Définition :

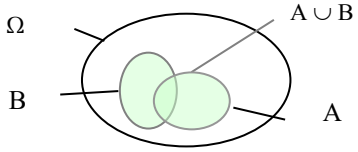
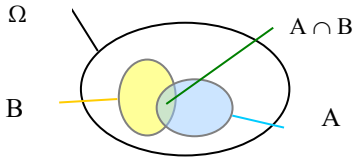
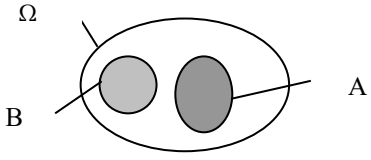
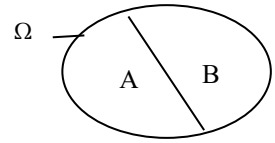
On appelle **événement** toute partie de l'univers .

Une éventualité ω **appartient** à l'univers Ω (on note $\omega \in \Omega$) .
Un événement A est **inclus** dans l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$) .

Exemple : Par exemple, on peut considérer l'événement A : " obtenir un nombre pair " . On a $A = \{2;4;6\}$

Remarque : Lorsqu'une éventualité ω appartient à un événement A, on dit que ω réalise A.

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'événement.
A, B et C représentent des événements d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire.

VOCABULAIRE ET NOTATION	SIGNIFICATION	EXEMPLE
Cardinal de A : card (A)	nombre d'éventualités qui composent A	L'événement A : " obtenir un nombre pair " est composé de 3 éventualités . card (A) = 3
Événement élémentaire	événement réduit à une seule éventualité	L'événement B : " obtenir le nombre 3 " ; $B=\{3\}$
Événement impossible : $A = \varnothing$	événement qui ne se réalise jamais	L'événement C : " obtenir un multiple de 3 inférieur ou égal à 2 "
Événement certain : $A = \Omega$	événement qui se réalise toujours	L'événement D : " obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 "
C est **la réunion** de A et de B : $C = A \cup B$ (on dit A ou B)	C' est l'ensemble des éventualités réalisant A ou B 	Soit l'événement E : " obtenir un nombre au moins égal à 4 " ; $E=\{4;5;6\}$ Soit l'événement F : " obtenir un nombre impair " ; $F=\{1;3;5\}$ L'événement E ∪ F est " obtenir un nombre au moins égal à 4 ou un nombre impair " $E \cup F = \{1;3;4;5;6\}$
C est **l'intersection** de A et de B : $C = A \cap B$ (on dit A et B)	C'est l'ensemble des éventualités réalisant A et B en même temps. 	L'événement E ∩ F est " obtenir un nombre au moins égal à 4 et un nombre impair " c'est à dire " obtenir un nombre impair au moins égal à 4 " $E \cap F = \{5\}$
A et B sont **disjoints** ou **incompatibles**	A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ; $A \cap B = \varnothing$ 	Les événements E et B sont incompatibles . $E \cap B = \varnothing$
A et B sont **contraires** ou **complémentaires**. $B = \overline{A}$	$A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$ $\overline{A}$ est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A . 	Les événements A et F sont contraires. $F = \overline{A}$

2) LOI DE PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI

Définition :

On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n\}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.

Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre p_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
- La probabilité d'un événement A, notée P (A) , est la somme des probabilités p_i des éventualités qui constituent A.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des résultats possibles. Les conditions de l'expérience conduisent le plus souvent au choix du modèle.

On garde ces notations pour le reste du chapitre.

Remarque : Pour toute éventualité ω_i on a : $0 \leqslant p_i \leqslant 1$.

Propriétés :

Soit A et B deux événements de Ω, alors :

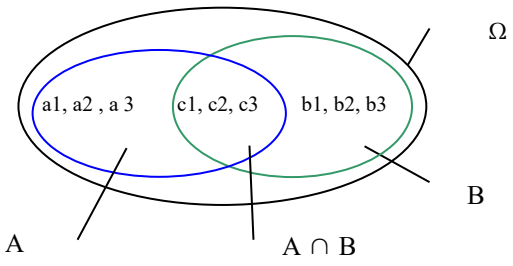
- La probabilité de l'événement certain est 1 ; $P(\Omega) = 1$
- La probabilité de l'événement impossible est 0 ; $P(\varnothing) = 0$
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  Si A et B sont incompatibles , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Idée de preuve :

- L'exemple suivant illustre : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

On voit bien que l'intersection intervient deux fois



- On a : $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \Leftrightarrow 1 = P(A) + P(\overline{A}) - P(A \cap \overline{A}) \Leftrightarrow 1 = P(A) + P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3) CAS PARTICULIER : ÉQUIPROBABILITÉ

Définition - Propriété :

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** .

Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités ω , on a :

$p_i = P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\text{card}(\Omega)}$

On a alors, pour tout événement A : $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

$$P(A) = \frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$$

Remarque :

Les expressions suivantes " dé parfait ou équilibré " , " boules indiscernables " … indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Exemple :

Le dé est non truqué : chacune des faces à la même chance d'être obtenue . Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On présente souvent les résultats dans un tableau

La probabilité de l'événement A : " obtenir un nombre pair " est : $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

4) PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Définition :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$.
On appelle « **probabilité conditionnelle de A par rapport à B** » ou « **probabilité de A sachant B**» le réel, noté $\mathbf{P_B(A)}$ défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarques :

- Dans le cas d'un univers fini où les issues sont équiprobables, on a : $P_B(A) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$
- Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ et $P_B(A) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$
- Si $B \subset A$, alors $A \cap B = B$ et $P_B(A) = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

Exemple :

Un lycée a présenté 356 candidats au bac, dont 96 suivant la spécialité SVT . 256 élèves ont été admis à l'examen ; parmi eux 64 ont suivi la spécialité SVT.
Un élève étant choisi au hasard parmi les candidats présentés par le lycée, on note A l'événement : « l'élève a suivi la spécialité SVT » et B l'événement : « l'élève a été reçu au bac » .

Chaque élève a la même chance d'être choisi ; par équiprobabilité, on a donc :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = \frac{64}{256} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

La probabilité que l'élève a suivi la spécialité SVT **sachant qu'il est reçu au bac**, est donc égale à 0,25 .

On a aussi $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)} = \dfrac{64}{96} = \dfrac{2}{3}$

En général : $P_B(A) \neq P_A(B)$

Ainsi la probabilité que l'élève soit reçu au bac **sachant qu'il a suivi la spécialité SVT** est $\frac{2}{3}$.

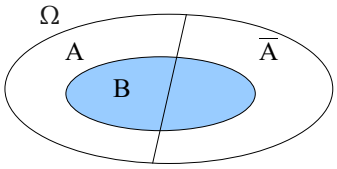
Propriétés :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$. On a :

$$0 \leqslant P_B(A) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$$

Preuve :

- On a $A \cap B \subset B$, donc $0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant P(B)$ et en divisant les trois membres de cette inégalité par le nombre strictement positif $P(B)$, on obtient : $0 \leqslant \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant P_B(A) \leqslant 1$



On voit que : $(A \cup \overline{A}) \cap B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$

- On a $P_B(A \cup \overline{A}) = \dfrac{P((A \cup \overline{A}) \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B))}{P(B)}$

  Or $P_B(A \cup \overline{A}) = P_B(\Omega) = 1$ et les événements $(A \cap B)$ et $(\overline{A} \cap B)$ sont incompatibles.
  Ce qui donne :
  $1 = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} + \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow 1 = P_B(A) + P_B(\overline{A}) \Leftrightarrow P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$

Propriété :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$. On a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Ces égalités se déduisent de la définition précédente.

Ces deux égalités se retiennent assez facilement : pour que l'événement A et B soit réalisé, il faut d'abord que l'événement A le soit, et sachant que l'événement A est réalisé, il faut ensuite que l'événement B le soit aussi …

Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et cinq rouges, indiscernables au toucher.
On tire au hasard une première boule de l'urne . Si elle est bleue, on la remet dans 1'urne et on rajoute une autre boule bleue ; si elle est rouge, on ne la remet pas dans l'urne . On tire ensuite, au hasard, une seconde boule de l'urne.
On s'intéresse à la probabilité pour que les deux boules extraites soient bleues.

B_1 est l'événement : « la première boule extraite est bleue » ; B_2 est l'événement : « la seconde boule extraite est bleue ».
L'événement « les deux boules extraites sont bleues » est alors $B_1 \cap B_2$.

On a $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)$

Les boules ont la même chance d'être tirées ; par équiprobabilité, on a donc : $P(B_1) = \dfrac{3}{8}$

B_1 étant réalisé, on rajoute une boule bleue, si bien qu'au moment du second tirage il y a 4 boules bleues sur 9 boules dans l'urne.

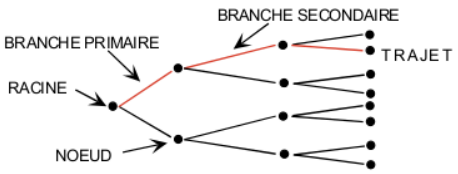
Ce qui permet d'écrire $P_{B_1}(B_2) = \dfrac{4}{9}$

On en déduit : $P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{6}$. La probabilité que les deux boules extraites soient bleues est donc égale à $\dfrac{1}{6}$

5) RÈGLES DE CONSTRUCTION D'UN ARBRE PONDÉRÉ (ou arbre de probabilités)

Pour déterminer des probabilités, on peut être amené à construire des arbres dont les branches sont affectées de probabilités.

- Un arbre pondéré se construit et se lit de gauche à droite.
- L'origine de l'arbre est la **racine** de l'arbre.
- Les traits partant de la racine sont appelés **branches primaires** de l'arbre. Elles mènent à des **nœuds**.
- Les branches joignant deux nœuds sont dites **secondaires.**
- Tout chemin menant de la racine à un nœud est appelé **trajet.**



Règles :

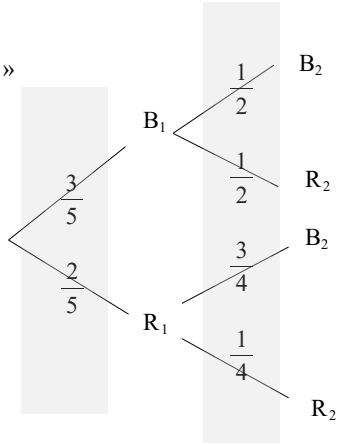
1. Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches primaires forment une **partition** de l'univers Ω .
2. Le **poids** d'une branche primaire est la **probabilité** de l'événement qui se trouve à son extrémité.
3. Le poids d'une branche secondaire est la **probabilité conditionnelle** de l'événement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.
4. Le poids ou la probabilité d'un trajet (ou chemin) est le **produit** des poids des branches le constituant.

Remarques :

- La somme des poids des branches primaires vaut 1.
- La somme des poids des branches secondaires issues d'un même nœud vaut 1.

Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et deux boules rouges.
On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.
L'expérience aléatoire peut être décrite par l'arbre pondéré suivant :
On note B_i : « la ième boule est bleue» et R_i : « la ième boule est rouge »



- La probabilité que la deuxième boule soit rouge sachant que la première premières était bleue est :
  $P_{B_1}(R_2)=\frac{1}{2}$. *(règle 3)*
- $P(R_1 \cap B_2) = \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$ *(règle 4)*

6) LOI DES GRANDS NOMBRES

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois une expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser, ce qui n'est parfois que théorique car répéter une expérience aléatoire dans les mêmes conditions n'est pas toujours envisageable.

Ce constat est un résultat mathématique appelé " **La loi des grands nombres** " ; Il se démontre, mais la démonstration est largement hors de vos compétences :

Propriété :

Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.

Ce qui nous permet de comprendre la raison pour laquelle, il y a un peu près autant d'hommes que de femmes sur la terre.