MATRICES - QUELQUES UTILISATIONS

1) SUITES DE MATRICES

Définitions :

Soit un entier naturel n .

- On appelle **suite de matrices colonnes** (U_n) , des matrices colonnes dont tous les éléments sont des termes de suites numériques.
- On dit que (U_n) **converge** si et seulement si tous ses éléments convergent. La limite de (U_n) est alors la matrice ayant pour coefficients les limites de chaque terme de (U_n) .

On définit de la même manière **une suite de matrices lignes**.

Dans les autres cas, on dit que la suite est divergente.

Exemple :

- La suite (U_n) définie par $U_n=\begin{pmatrix} n^3 \\ 2-n \end{pmatrix}$ est une suite de matrices dont les coefficients sont les suites numériques (a_n) et (b_n) définies par $a_n=n^3$ et $b_n=2-n$.

La suite (U_n) est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-n=-\infty$

- La suite (V_n) définie par $V_n=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} \\ 2+e^{-n} \end{pmatrix}$ est convergente . Sa limite est la matrice $V=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Propriété :

Si A est une matrice carrée d'ordre $p\in\mathbb{N}$ et (U_n) une suite de matrices colonnes à p lignes telles que pour tout entier naturel n , $U_{n+1}=A\,U_n$, alors :

$$\forall n\in\mathbb{N} \ , \ U_n=A^n U_0$$

Preuve :

Soit la propriété P(n) : " $U_n=A^n U_0$ ", pour $n\in\mathbb{N}$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Initialisation :

$A^0=I_p$, P(0) est donc vraie.

Hérédité :

Supposons P(n) vraie pour un entier $n\in\mathbb{N}$ fixé, c'est à dire $U_n=A^n U_0$ (HR)

Montrons que la propriété P(n+1) est vraie, c'est à dire $U_{n+1}=A^{n+1}U_0$

On a $U_{n+1}=A\,U_n=A\left(A^n U_0\right)$ (d'après HR)

Ainsi $U_{n+1}=\left(AA^n\right)U_0=A^{n+1}U_0$

On a donc démontré que P(n+1) est vraie.

Conclusion :

P(n) est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, c'est à dire : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n=A^n U_0$

Exemple :

Soit (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0=1$, $b_0=2$ et $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n-2\,b_n \end{cases}$, pour tout entier naturel n .

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n , on pose $U_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On a $U_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1}=A\,U_n$.

On en déduit que $U_7=A^7U_0=\begin{pmatrix} 171 \\ -531 \end{pmatrix}$



Define $a=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ *Terminé*

Define $u0=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *Terminé*

$a^7\cdot u0$ $\begin{bmatrix} 171 \\ -531 \end{bmatrix}$

Propriété et définition : ***admise***

Soit A une matrice carrée d'ordre $p \in \mathbb{N}$, B une matrice colonne à p lignes et (U_n) une suite de matrices colonnes à p lignes, telles que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A\,U_n + B$.

Si la suite (U_n) converge alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant $U = AU + B$.

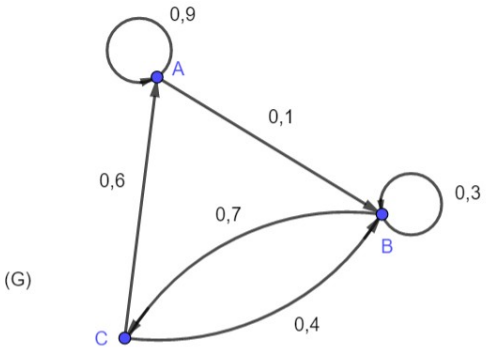
On dit que la matrice U est **l'état stable** de la suite (U_n)

2) CHAÎNES DE MARKOV

Définition :

- **Un graphe pondéré** est un graphe dont les arêtes sont affectées de coefficients positifs.
- **Le poids** d'une chaîne est la somme des coefficients affectés aux arêtes qui composent la chaîne.
- **Un graphe probabiliste** est un graphe orienté pondéré où tous les poids sont compris entre 0 et 1et tel que la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.

Exemple : (G) est un graphe prababiliste à trois états.



Définition :

La matrice associée à un graphe probabiliste comportant p sommets s'appelle **une matrice de transition.**

C'est une matrice carrée d'ordre p telle que le terme de la i-ème ligne et j-ième colonne est égal au poids de l'arête allant du sommet i au sommet j si elle existe , 0 sinon.

Si les sommets sont des lettres, on numérote les sommets en respectant l'ordre alphabétique.

Exemple : La matrice de transition du graphe (G) de l'exemple précédent est $\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque : La somme des termes de chaque ligne est égale à 1.

Définition :

Soit une suite de variables aléatoires (X_n) permettant de modéliser l'évolution par étapes successives d'un système aléatoire comportant différents états.

La loi de probabilité de X_0 (étape 0) s'appelle **la distribution initiale du système.**

La loi de probabilité de X_n (étape n) s'appelle **la distribution après *n* transitions**.

Si, à chaque étape, la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de n, on dit que la suite (X_n) est une **chaîne de Markov**.

On associe à une chaîne de Markov un graphe probabiliste tel que les sommets sont les états du système aléatoire et le poids de chaque arête est égal à la probabilité de transition d'un état à un autre.

3) CHAÎNES DE MARKOV : REPRÉSENTATION À L'AIDE D'UNE SUITE DE MATRICES

Propriété :

Soit une chaîne de Markov à 2 (respectivement 3) états et P la matrice de transition associée.

Soit trois entiers naturels n , i et j tels que $n\geqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant 2$ et $1\leqslant j\leqslant 2$ (respectivement $1\leqslant i\leqslant 3$ et $1\leqslant j\leqslant 3$).

La probabilité de passer de l'état i à l'état j en n étapes est égale au terme de la i -ème et j -ième colonne de la matrice P^n .

Preuve : Démonstration pour une chaîne de Markov à 2 états.

Soit la propriété $Q(n)$: " $P^n=\begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2)\end{pmatrix}$ ", pour $n\in\mathbb{N}^*$

Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Initialisation :

Pour $n=1$, on a par définition de la matrice de transition $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$ où $p_{ij}=P_{x_0=i}(X_1=j)$ (avec $i\in[1;2]$ et $j\in[1;2]$)

Q(1) est donc vraie.

Hérédité :

Supposons $Q(n)$ vraie pour un entier $n\in\mathbb{N}$ fixé, c'est à dire $P^n=\begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2)\end{pmatrix}$ (HR)

Montrons que la propriété Q(n+1) est vraie, c'est à dire $P^{n+1}=\begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=1}(X_{n+1}=2) \\ P_{X_0=2}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=2}(X_{n+1}=2)\end{pmatrix}$

Soit deux entiers naturels i et j tels que $1\leqslant i\leqslant 2$ et $1\leqslant j\leqslant 2$.

Dans un premier temps, on calcule la probabilité de passer de l'état à i à l'état j en $n+1$ transitions.

(Pour cette démonstration, on utilise le fait que $P_{X_0=i}$ est une probabilité)

$P_{X_0=i}(X_{n+1}=j)=P_{X_0=i}((X_{n+1}=j)\cap(X_n=1))+P_{X_0=i}((X_{n+1}=j)\cap(X_n=2))$ (D'après la formule des probabilités totales)

$=P_{X_0=i}(X_n=1)P_{X_n=1}(X_{n+1}=j)+P_{X_0=i}(X_n=2)P_{X_n=2}(X_{n+1}=j)$ (On utilise $P_{X_0=i}(A\cap B)=P_{X_0=i}(A)P_A(B)$)

$=P_{X_0=i}(X_n=1)p_{1j}+P_{X_0=i}(X_n=2)p_{2j}$ (car la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de n)

Or $P^{n+1}=P^nP=\begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$ d'après (HR)

$=\begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1)p_{11}+P_{X_0=1}(X_n=2)p_{21} & P_{X_0=1}(X_n=1)p_{12}+P_{X_0=1}(X_n=2)p_{22} \\ P_{X_0=2}(X_n=1)p_{11}+P_{X_0=2}(X_n=2)p_{21} & P_{X_0=2}(X_n=1)p_{12}+P_{X_0=2}(X_n=2)p_{22}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=1}(X_{n+1}=2) \\ P_{X_0=2}(X_{n+1}=1) & P_{X_0=2}(X_{n+1}=2)\end{pmatrix}$

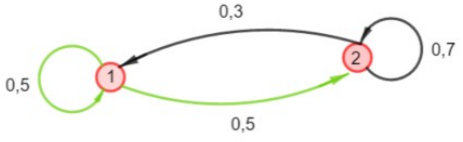
On a donc démontré que P(n+1) est vraie

Conclusion :

P(n) est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, c'est à dire : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P^n=\begin{pmatrix} P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2) \\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2)\end{pmatrix}$

Exemple :

- On considère une marche aléatoire à deux états modélisée par le graphe probabiliste ci-dessous et P la matrice de transition associée.



$P=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7\end{pmatrix}$

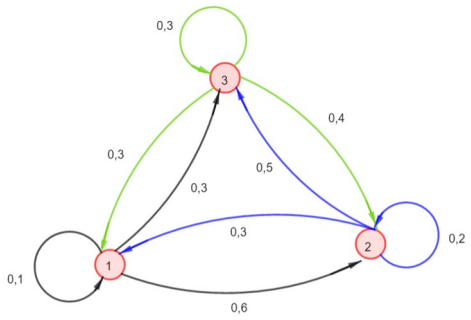


Define $p=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7\end{bmatrix}$ *Terminé*

p^4 $\begin{bmatrix} 0.376 & 0.624 \\ 0.3744 & 0.6256\end{bmatrix}$

La probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 en 4 étapes 0,624

. On considère une marche aléatoire à trois états modélisée par le graphe probabiliste ci-dessous et P la matrice de transition associée.



$$P=\begin{pmatrix}0,1 & 0,6 & 0,3\\ 0,3 & 0,2 & 0,5\\ 0,3 & 0,4 & 0,3\end{pmatrix}$$



Define $p=\begin{bmatrix}0.1 & 0.6 & 0.3\\ 0.3 & 0.2 & 0.5\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\end{bmatrix}$ *Terminé*

p^3 $\begin{bmatrix}0.244 & 0.396 & 0.36\\ 0.252 & 0.364 & 0.384\\ 0.252 & 0.372 & 0.376\end{bmatrix}$

La probabilité de passer de l'état 3 à l'état 1 en 3 étapes 0,252

4) CHAÎNES DE MARKOV : ÉTUDE ASYMPTOTIQUE

Définition :

Soit une chaîne de Markov à 2 (respectivement 3) états et P la matrice de transition associée.

On note π_n la matrice ligne à 2 (respectivement 3) colonnes dont le terme de la j -ième colonne est la probabilité qu'à l'étape n la variable aléatoire X_n soit égalé à j , c'est à dire :

$$\pi_n=(P(X_n=1)\quad P(X_n=2)) \quad (\text{respectivement } \pi_n=(P(X_n=1)\quad P(X_n=2)\quad P(X_n=3)))$$

Remarque : π_0 représente la distribution initiale et π_n la distribution après n transitions.

Propriété :

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $\pi_{n+1}=\pi_n P$ et $\pi_n=\pi_0 P^n$.

P^n ne contient pas de 0 signifie qu'en n étapes on peut passer de n'importe quel état à n'importe quel autre état.

Preuve : ***Démonstration pour une chaîne de Markov à 2 états.*** *exigible*

Par définition de la matrice de transition $P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$ où $p_{ij}=P_{X_0=i}(X_1=j)$ (avec $i\in\{1;2\}$ et $j\in\{1;2\}$)

Soit un entier naturel n . On a :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=1)&=P(X_{n+1}=1\cap X_n=1)+P(X_{n+1}=1\cap X_n=2) \quad (\text{D'après la formule des probabilités totales})\\ &=P(X_n=1)P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)+P(X_n=2)P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)\\ &=P_{X_n=1}(X_{n+1}=1)P(X_n=1)+P_{X_n=2}(X_{n+1}=1)P(X_n=2)\\ &=p_{11}P(X_n=1)+p_{21}P(X_n=2) \quad (\text{car la probabilité de transition d'un état à un autre ne dépend pas de } n)\end{aligned}$$

On démontre de même que $P(X_{n+1}=2)=p_{12}P(X_n=1)+p_{22}P(X_n=2)$

On a donc bien $\pi_{n+1}=\pi_n P$

On suppose maintenant $n\geqslant 1$. On a déjà vu que $P^n=\begin{pmatrix}P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2)\\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2)\end{pmatrix}$.

On a alors $\pi_0 P^n=(P(X_0=1)\quad P(X_0=2))\begin{pmatrix}P_{X_0=1}(X_n=1) & P_{X_0=1}(X_n=2)\\ P_{X_0=2}(X_n=1) & P_{X_0=2}(X_n=2)\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}&=(P(X_0=1)P_{X_0=1}(X_n=1)+P(X_0=2)P_{X_0=2}(X_n=1)\quad P(X_0=1)P_{X_0=1}(X_n=2)+P(X_0=2)P_{X_0=2}(X_n=2))\\ &=(P((X_0=1)\cap(X_n=1))+P((X_0=2)\cap(X_n=1))\quad P((X_0=1)\cap(X_n=2))+P((X_0=2)\cap(X_n=2)))\\ &=(P(X_n=1)\quad P(X_n=2))\\ &=\pi_n\end{aligned}$$

Propriété : ***admise***

S'il existe un entier naturel n tel que P^n ne contient pas de 0 alors la suite (π_n) converge vers la matrice π vérifiant $\pi=\pi P$ et cette limite ne dépend pas de π_0 .

La matrice π représente **la distribution invariante du système**.

Remarque : Si la matrice P ne contient pas de 0, alors la suite (π_n) converge.